B.C.U. Timisoara
658518

IANCU LUCICA

CONCEPTE ŞI METODE MATEMATICE ÎN LOGICĂ

EDITURA DE VEST

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

IANCU, LUCICA

Concepte și metode matematice în logică : valori și limite / Iancu Lucica. - Timișoara : Editura de Vest, 2009

Bibliogr.

ISBN 978-973-36-0485-3

51:16

© – 2009 – EDITURA DE VEST - TIMIȘOARA

P-ța Sf. Gheorghe nr. 1, ROMÂNIA

IANCU LUCICA

CONCEPTE ŞI METODE MATEMATICE ÎN LOGICĂ

Valori şi Limite

Ediția a doua

EUGEN TO
TIMIŞOARA
INV. 653518

BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
TIMIŞOARA
02299194

EDITURA DE VEST
Timişoara, 2009

ISBN 978-973-36-0485-3

În amintirea fostului meu profesor,
Gheorghe Enescu

PREFAŢĂ LA EDIŢIA A DOUA

Faţă de prima ediţie a acestei cărţi, ediţia a doua nu conţine modificări suficient de importante încât să-şi justifice numele de ediţie revăzută şi adăugită. *Cu toate acestea, au fost netezite unele asperităţi ale textului astfel încât lectura să devină mai uşoară, iar ideile mai simplu de urmărit.*

Cartea poartă asupra fenomenului matematizării logicii şi, dacă nu ar suna prea pretenţios, aş spune că ea reprezintă şi astăzi înţelegerea mea asupra dezvoltării logicii. Parte din problemele discutate aici au fost dezvoltate de mine în Logica vol. I *şi în alte câteva lucrări pe care le-am publicat de atunci pe această temă.*

Cartea face parte din bibliografia cursului meu de metalogică însă a fost concepută în aşa fel încât să poată fi de folos tuturor celor interesaţi de problematica logicii moderne. Mulţumesc, de aceea, tuturor celor care, de-a lungul anilor, au manifestat interes faţă temele abordate de mine făcându-mi diferite observaţii. În mod special mulţumesc Editurii de Vest care a întâmpinat şi gestionat proiectul realizării acestei cărţi.

Prof. univ. dr. Iancu Lucica

Timişoara, 18. 10. 2008

INTRODUCERE

O abordare de tipul celei pe care o sugerează titlul lucrării de față este de natură să stârnească nedumeriri și poate chiar îndoieli. Au trecut mai bine de o sută șaizeci de ani de la apariția cărții lui George Boole, *Mathematical Analysis of Logic* (1847) și aproape o sută treizeci de ani de la apariția cărții lui Gotlob Frege, *Begriffsschrift* (1879), două dintre lucrările de pionierat ale logicii formale moderne.

În tot acest timp, grație metodelor matematice folosite, logica a cunoscut o dezvoltare de-a dreptul explozivă, astfel că nu vom greși spunând că ea este în momentul de față singura disciplină exactă din sistemul tradițional al disciplinelor filosofice.

De vreme însă ce logica se prezintă astăzi ca o știință ajunsă în stadiul deplinei ei maturități, ce sens mai are să vorbim despre *valoarea* metodelor sale?

Și iarăși, dacă rezultatele ei sunt de așa natură încât nimeni nu se mai gândește în mod serios să le pună la îndoială, ce sens mai are să vorbim despre *limitele* acestor metode?

Și totuși...

Dincolo de aprecierile curente ce se fac despre caracterul așa-zis matematic al logicii moderne se ridică o serie de întrebări privind natura conceptelor și a metodelor sale, a modalităților concrete în care se aplică aceste concepte și metode și a finalității lor. Sunt întrebări ce îndeamnă la regândirea statutului logicii moderne, a dinamismului său actual prin apropierile și distanțările sale de matematică, ca și a unor subiecte mult discutate astăzi privind disponibilitățile ei de aplicare. Iată de ce mi-am propus să trec în revistă câteva aspecte privind actualele aplicații cu caracter matematic în logică, să

încerc să arăt în ce măsură respectivele aplicaţii se dovedesc indispensabile dezvoltării logicii. Sper, prin aceasta, să pot risipi unele prejudecăţi cu privire la statutul actual al ştiinţei logicii, prejudecăţi de natură să ţină la distanţă de această ştiinţă o categorie încă destul de largă de cititori.

Ideea pe care vreau să o subliniez prin această carte este că blocarea logicii în relaţiile ei cu matematica nu este nici în folosul logicii şi nici al matematicii, că logica trebuie să-şi redobândească eficienţa în calitatea ei de *organon*, de *îndreptar al gândirii* în toate domeniile şi nu doar în matematică, aşa cum s-a crezut multă vreme şi cum se mai crede uneori şi astăzi.

Fără îndoială, o asemenea investigaţie poate fi realizată în diverse moduri, în funcţie de punctul de vedere pe care îl adoptă un autor sau altul. În ce mă priveşte, voi încerca să răspund acestor exigenţe urmând în principal câteva distincţii.

Voi distinge, în primul rând, între modelul strict logic şi modelul matematic încercând să arăt limitele între care formalismele logice se pot deplasa de pe poziţiile unui model pe celălalt şi eventualele consecinţe ce pot rezulta de aici. Vom vedea în capitolele ce urmează cum logica a devenit în zilele noastre o ştiinţă formală (în sensul actual al termenului) fără ca prin aceasta să-şi fi anulat suportul ei intuitiv, sursă principală de inspiraţie şi de aplicaţii.

Voi distinge, apoi, între sistemul conceptual al logicii şi sistemul conceptual al matematicii având în vedere că cele două ştiinţe folosesc în comun o serie de concepte – *mulţime*, *funcţie*, *relaţie*, *structură* etc. – fără să putem spune întotdeauna cu claritate care este originea aplicaţiilor acestor concepte în logică. La prima vedere, ele sunt un fel de „noduri" în relaţiile dintre cele două ştiinţe, noduri prin care acestea sunt legate între ele, însă fiecare pleacă într-o cu totul altă direcţie.

În sfârşit, voi distinge între metodele logicii şi metodele matematicii, mai precis, între acele metode originar folosite în matematică pentru că cele mai multe dintre metodele logicii întâlnesc metodele matematice doar în planul descrierilor foarte generale. Or, în asemenea situaţii este impropriu să vorbim despre *aplicarea* metodelor matematice în logică pentru simplul motiv că nu metodele ca atare sunt cele care se aplică aici. Acest aspect, din câte cunosc, a fost mai puţin studiat până acum în literatura noastră de specialitate.

O succintă incursiune în dezvoltarea logicii moderne ne va ajuta să înţelegem mai bine direcţiile în care au evoluat raporturile ei cu matematica şi situaţia la care s-a ajuns astăzi. Aceasta, pentru că centrul de greutate al discuţiilor privind raporturile celor două ştiinţe s-a deplasat în ultimul timp de la nivelul obiectului spre cel al metodelor, deşi între ele continuă să existe numeroase simetrii şi puncte de vedere comune.

Aşa cum am mai spus, începuturile logicii moderne se leagă de numele lui G. Boole şi G. Frege, primii autori care au întrevăzut posibilitatea aplicării unor concepte şi procedee matematice conţinutului logicii. Concepţiile total diferite pe care cei doi autori le-au avut atât în privinţa logicii, cât şi a matematicii, au făcut ca şi intenţiile lor cu privire la cele două ştiinţe să fie foarte diferite. În timp ce Boole vroia să construiască o logică după modelul matematicii (un fel de „matematică a intelectului omenesc", cum se exprimă el), Frege proiecta ambiţii mult mai mari. Intenţia lui era să dea o fundamentare logică matematicii, să arate că întreaga matematică este deductibilă, prin aritmetică, din logică.

În esenţă, programul lui Frege consta în: *a*) definirea conceptelor matematice (în primul rând numărul), prin concepte logice; *b*) exprimarea propoziţiilor matematice în termeni logici şi *c*) demonstrarea teoremelor matematice din axiome logice cu ajutorul regulilor logice.

Este de la sine înțeles că un asemenea program nu era compatibil cu logica tradițională, de factură aristotelică, deosebită de matematică atât în privința formei cât şi a conținutului ei. Se impunea, aşadar, un nou tip de logică, într-o nouă exprimare, care să o apropie întrucâtva de exprimările întâlnite în teoriile matematice.

Este discutabil astăzi dacă, în elaborarea noii logici, Frege a cunoscut şi valorificat rezultatele acumulate în îndelungata tradiție a logicii, sau dacă a luat totul de la capăt. Cert este că inovațiile introduse de el sunt de o asemenea amploare şi profunzime încât mulți autori contemporani au găsit de cuviință să compare *momentul Frege* cu *momentul Aristotel* în dezvoltarea logicii.

Apariția antinomiilor logico-matematice a făcut ca programul lui Frege de fundamentare a matematicii să fie preluat de Whitehead şi Russell în *Principia Mathematica*, lucrare de largă anvergură intelectuală în care logica matematică apare, în linii mari, elaborată. Pasul decisiv în *PM* l-a constituit înlocuirea simbolismului lui Frege, greoi şi foarte neeconomicos, cu noul simbolism al lui Peano.

Dintre disciplinele tradiționale ale logicii matematice, în *Principia Mathematica* apar: logica propozițiilor, logica predicatelor, logica claselor şi, parțial, logica relațiilor. La acestea se adaugă unele teorii mai speciale cum este teoria descripțiilor, de exemplu, teoria tipurilor, aritmetica tratată logic.

O serie de discipline logice mai mult sau mai puțin dezvoltate în logica tradițională, cum ar fi silogistica sau logica modală, de exemplu, nu-şi găsesc abordarea în *PM*. Ele au fost reluate ceva mai târziu, iar includerea lor în domeniul logicii matematice s-a dovedit a nu fi lipsită de probleme.

De îndată ce logica matematică a fost elaborată, dificultățile în ceea ce priveşte realizarea programului logist (= programul lui Frege în versiunea *PM*) devin din ce în ce mai evi-

dente. Ele vizează în egală măsură logica şi matematica, însă apar acum şi unele probleme filosofice noi, care nu sunt tocmai lipsite de interes.

Din punct de vedere matematic se invocă cele două axiome ale teoriei mulţimilor – *axioma alegerii*, respectiv, *axioma infinitului* – care, deşi se pot formula în termeni logici, nu sunt totuşi deductibile din logică. Ceea ce înseamnă că acele secţiuni ale matematicii care au la bază cele două axiome sunt independente de logică.

Un efect similar îl au, relativ la programul logicist, şi teoremele lui Gödel de incompletitudine. Sisteme logiciste, cum ar fi sistemul *Principiei Mathematica*, sistemul *Zermello-Fraenkel* de teoria mulţimilor sau sistemul lui Quine din *Mathematical Logic* sunt principial incomplete. Aceasta înseamnă că există propoziţii ce pot fi formulate în limbajul respectivelor sisteme, propoziţii ce nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate în limitele şi cu mijloacele sistemului.

Orice astfel de sistem va fi, aşadar, insuficient pentru a putea reproduce întreaga matematică.

Dar dacă argumentele invocate vizează cu prioritate extensiunea sistemelor logistice, respectiv aria lor de cuprindere, alte obiecţii pun sub semnul întrebării însăşi valabilitatea unora dintre succesele demersului logicist. Celebra definiţie a numărului dată de Frege şi reformulată de Russell nu „dizolvă" numărul în concepte pur logice, cum s-a crezut iniţial, şi aceasta, pentru că unele dintre conceptele prin care se defineşte el (*clasă*, *proprietate*, *relaţie de corespondenţă* ş.a.) nu sunt concepte private ale logicii. Aceste concepte sunt astăzi atât de generale încât s-ar putea spune despre ele că aparţin mai degrabă metodologiei generale a ştiinţelor decât unui domeniu anume, chiar dacă o lungă perioadă de timp utilizarea lor s-a limitat numai la un asemenea domeniu

O serie de dificultăţi legate de definiţia logicistă a numărului au fost semnalate de St. Körner în cartea sa *Introducere în filosofia matematicii*. În concepţia acestui autor, definiţia numărului nu realizează distincţia dintre *empiric* şi *neempiric*, respectiv, *a priori – a posteriori* în trecerea de la conceptul pur la aplicaţiile acestuia. Conceptul de „unu" ca şi propoziţia „unu şi cu unu fac doi" sunt apriorice, în timp ce „un măr şi cu un măr fac două mere" este aposteriorică.

Concluzia lui Körner este că enunţurile matematicii, deşi împărtăşesc cu logica caracterul lor aprioric, nu sunt totuşi reductibile la acestea.

Apoi, conceptul de număr natural implică infinitatea actuală într-un sens pe care conceptul empiric nu-l implică. Legat de acest aspect, St. Körner apreciază că definiţia numărului este dependentă de o ipoteză nelogică, şi anume axioma infinitului. Russell se expune acestei obiecţii prin faptul că nu poate explica în termeni logici de ce fiecare număr natural n are un succesor unic $n + 1$.

La rândul ei, ideea de echivalenţă a fost suspectată că ar presupune ideea de număr, de unde impresia că definiţia numărului ar fi circulară.

Fără îndoială că nu toate aceste obiecţii sunt decisive, totuşi ele merită luate în considerare când discutăm problemele logicismului.

În sfârşit, o altă categorie de obiecţii se referă la tipul de raţionament folosit în demonstraţiile matematice, la legitimitatea anumitor legi şi scheme de raţionare. Aceste obiecţii au fost pe larg dezvoltate de reprezentanţii intuiţionismului matematic pentru care atât logica, cât şi matematica corespund „părţii exacte din gândirea umană" (Heyting). Pe de o parte – arată Heyting – matematica este independentă de logică, iar pe de altă parte, logica face parte din aplicaţiile matematicii.

Aşadar, reducţionismul de tip logicist a fost înlocuit cu opusul său, reducţionismul de tip matematist.

Se poate spune că subordonarea logicii faţă de matematică se face în concepţia intuiţionistă în două sensuri: *a*) obiectual (existenţial) şi *b*) metodologic.

În sens obiectual, logica este o ramură a matematicii (obiectul logicii face parte din obiectul matematicii), iar în sens metodologic, logica este o metodă destinată exclusiv utilităţilor matematice.

Văzută din perspectivă actuală, situaţia logicii şi a matematicii din perioada programelor fundaţioniste este în multe privinţe asemănătoare situaţiei unor state din perioada marilor descoperiri geografice. La început a fost dorinţa acelor state de a-şi spori puterea economică şi militară prin cucerirea de noi teritorii, necunoscute încă, pentru ca, în final, aceste teritorii, folosindu-se de înseşi instrumentele cuceririi lor, să ajungă la o dezvoltare proprie, cu nimic mai prejos decât cea a cuceritorilor.

Păstrând raporturile, am putea spune că logica, matematica şi fundamentele matematicii, deşi au debutat sub semnul tendinţelor reducţioniste, s-au dovedit până la urmă a fi discipline independente. „Logica (matematică - a.n.) – scrie Quine – aşa cum se prezintă ea în mod obişnuit, pare a se deosebi de matematică prin aceea că se ocupă de propoziţii şi relaţii dintre propoziţii, în primul rând implicaţia, pe câtă vreme matematica se ocupă de entităţi (lucruri) nelingvistice: numere, funcţii şi altele asemenea lor" (60; 2).

Quine realizează aici deosebirea esenţială (de obiect) dintre cele două ştiinţe. Am putea nuanţa această delimitare spunând că logica studiază raporturile inferenţiale dintre propoziţii acordând atenţie formei şi făcând abstracţie de conţinut (merită reţinută, de asemenea, observaţia că implicaţia este relaţia fundamentală a logicii).

Matematica, la rândul ei, studiază cu prioritate numere, mulțimi şi, în general, probleme care îşi au originea mai mult sau mai puțin îndepărtată de conceptele de număr şi mulțime.

Chiar dacă definițiile mai noi ale matematicii aduc în discuție idei cum ar fi: *structură*, *sistem formal*, *calcul* şi altele asemenea lor, conceptele de număr şi mulțime se numără, totuşi, printre conceptele ei de bază.

A subordona atunci logica matematicii, cum preconizau concepțiile intuiționiste, înseamnă a trece cu vederea peste deosebiri esențiale dintre cele două ştiințe, în primul rând peste deosebirile dintre obiectele lor proprii de cercetare.

Există şi un alt punct de vedere care a fost promovat, la vremea respectivă, de către Wang Hao şi care, de asemenea, merită să fie luat în considerare când discutăm aceste probleme. El se referă la oportunitatea aprofundării unei discipline indiferent de raporturile deductive în care aceasta poate intra cu o altă disciplină. „În general – arată Wang Hao – când două discipline sunt echivalente nu avem nevoie să studiem decât una dintre ele. Pe de altă parte, dacă o disciplină importantă A este reductibilă la o disciplină B, fiind însă substanțial mai slabă decât aceasta din urmă, noi nu putem conchide în mod logic că, întrucât A este o parte a lui B, A nu trebuie studiată separat. De exemplu, teoria numerelor şi analiza sunt amândouă reductibile la teoria mulțimilor, iar analiza include, ca parte proprie, teoria numerelor; cu toate acestea noi întreprindem cercetări separate ale celor trei discipline, deoarece fiecare dintre ele reprezintă propriile ei probleme specifice" (75; 13).

Această concluzie o consider pe deplin valabilă şi în cazul logicii, matematicii şi al fundamentelor matematicii care servesc, cum s-a văzut, unor scopuri distincte şi care studiază probleme distincte. Se impune, aşadar, ca aceste discipline să fie studiate separat, chiar dacă între ele continuă să existe raporturi foarte strânse.

Marile programe fundaționiste au eşuat în pretențiile lor reducționiste, lucru pe deplin explicabil astăzi, însă științele venite în contact au avut numai de câştigat. Logica a dobândit o serie de calități matematice, tot aşa cum matematica a dobândit, la rândul ei, o serie de calități logice. După cum foarte frumos se exprimă B. Russell, „logica a devenit mai matematică în aceeaşi măsură în care matematica a devenit mai logică" (65; 231).

Calitățile matematice ale logicii se referă la faptul că:

1) Utilizează limbajul simbolic, motiv pentru care ea circulă astăzi şi sub denumirea de „logică simbolică". Simbolismul logic prezintă toate avantajele simbolismului matematic, fără a fi reductibil totuşi la acesta.

2) Foloseşte procedee proprii de calcul.

3) Limbajul formulelor şi metodele de calcul îi dau un înalt grad de precizie întâlnit până acum numai în matematică şi în ştiințele care utilizează mijloace matematice.

4) Este formală şi formalizabilă (a se vedea în acest sens paragraful despre limbajele formalizate şi sistemele formale în logică).

5) Aplică concepte care țin mai mult de domeniul matematicii, deşi cele mai multe dintre aceste concepte apar acum într-o ipostază pur logică, nu matematică.

6) Poate fi prezentată într-o formă riguros matematică (vezi teoria funcțiilor de adevăr, de exemplu, sau unele abordări recente din semantică).

7) Este aplicabilă în studiul problemelor matematice.

Dar dacă logica modernă prezintă asemenea particularități care o apropie atât de mult de matematică, se pune în mod firesc întrebarea în ce raporturi mai stă ea cu logica tradițională sau *filosofică*, cum o mai numesc unii? Mai sunt compatibile cele două *logici* sau logica matematică reprezintă un moment de discontinuitate în evoluția logicii? Diferențele

dintre ele se limitează numai la aspecte legate de metodă sau există şi diferenţe mai profunde, diferenţe care privesc conţinutul?

Fără a intra în detalii, voi încerca să subliniez câteva aspecte.

Primul lucru care trebuie spus este că logica modernă nu este mai puţin filosofică decât logica de acum două mii de ani, în cel mai bun caz s-ar putea spune că ea este în alt mod filosofică (încă la sfârşitul secolului XIX, Poreţki spunea despre logica nouă, care atunci începuse a se constitui, că este matematică în formă şi filosofică în conţinut).

Dar chiar şi o asemenea atenuare a tezei privind caracterul filosofic al logicii moderne ar putea stârni nemulţumiri dacă ţinem seama de eforturile pe care le fac unii autori de a stabili diferite corespondenţe între filosofia tradiţională a logicii şi filosofia logicii moderne.

Aceasta pe de o parte. Pe de altă parte, logica tradiţională nu este nici ea în întregime o logică inexactă, cum s-a spus adeseori, în special în perioada de avânt a logicii matematice; dimpotrivă, interesul pentru exactitate şi rigoare a însoţit logica încă din primele sale faze constituind, într-un fel, premisa aplicaţiilor ei cu caracter matematic de mai târziu. Să nu uităm că încă din 1696, într-o scrisoare către Gabriel Wagner, Leibniz spunea despre Aristotel că a fost „primul care a gândit matematic în afara graniţelor matematicii". Discipline tradiţionale ale logicii, cum ar fi silogistica, logica modală, logica conceptului ş.a., care nu prezintă interes nemijlocit pentru matematică, au putut fi reluate în noul context al dezvoltării logicii tocmai datorită gradului înalt de precizie şi coerenţă la care au fost aduse şi care nu numai că au facilitat, dar în mare măsură au şi sugerat modalităţile de abordare pe baza mijloacelor moderne de astăzi. Faptul că ele nu sunt relevante pentru matematică i-a făcut pe mulţi autori să le privească cu rezer-

ve, sau chiar să le respingă, considerându-le mai curând „produsul fanteziei filosofice decât rezultatul unei necesităţi logico-matematice profunde" (A. Grzegorcyk).

Indiferent cum privim aceste probleme, un lucru mi se pare cert, şi anume că trecerea de la forma tradiţională a logicii la forma ei matematică nu este totuna cu trecerea ei de la forma ei preştiinţifică (sau neştiinţifică), la forma ei ştiinţifică. Cu alte cuvinte, raportul dintre logica tradiţională şi logica modernă nu este acelaşi cu raportul dintre fizica lui Aristotel, să zicem, şi fizica lui Galilei, dimpotrivă, logica tradiţională reprezintă prima etapă, şi cea mai lungă, de altfel, din întreaga dezvoltare a ştiinţei logicii.

Continuitatea dintre cele două mari tradiţii din dezvoltarea logicii este recunoscută astăzi de nume dintre cele mai autorizate. „Logica formală tradiţională, scrie Quine, datând în formele sale esenţiale de la Aristotel, este directul progenitor al logicii matematice" (60; 1).

Cu multă autoritate s-a pronunţat în această privinţă, la noi, Grigore Moisil: "S-a adoptat de către unii filosofi ideea că logica matematică, mai mult încă, logicile matematice neclasice, ar fi constituite de „calcule logoide" care nu corespund deloc sau numai foarte puţin, logicii tradiţionale. O astfel de separare poate fi dăunătoare logicii matematice, care, astfel, şi-ar mărgini domeniul la o „logică a ştiinţelor matematice". Dar o anume „logică a imperativelor", ce a început să fie studiată, nu şi-ar găsi locul printre cercetările privind structura logică a ştiinţelor matematice. De asemenea, logica modală, până astăzi cel puţin, nu-şi găseşte rostul ca o logică a disciplinelor matematice" (51; 421).

Însă nu întotdeauna problema continuităţii dintre cele două mari tradiţii din dezvoltarea logicii este luată în considerare astăzi. Printre matematicieni, mai ales, s-a încetăţenit ideea (preluată apoi şi în cercuri mai largi) că logica matema-

tică este o disciplină a matematicilor moderne ce cuprinde uneori şi fundamentele matematicii. Raporturile ei cu logica tradiţională, fie sunt negate, fie sunt pur şi simplu neglijate.

Cât de justificată poate fi o asemenea atitudine?

Depinde în primul rând de înţelesul pe care îl dăm termenului „logică matematică", pentru că, de fapt, acest termen nu are astăzi o semnificaţie univocă, el circulă în diferite accepţiuni, în funcţie de punctul de vedere pe care îl adoptă un autor sau altul.

Este necesar de aceea să comparăm, atunci când vorbim despre un anumit autor, definiţia termenului care are conţinutul propriu-zis al tratatului pentru a ne da seama de sensul exact al acestui termen la autorul respectiv. Pentru A. Church, ca să iau un exemplu la întâmplare, logica matematică (aceeaşi cu „logica simbolică" şi „logistica") este „logica formală studiată cu ajutorul limbajelor formalizate" (13; 56). El introduce însă aici mult mai mult decât lasă să se întrevadă prin definiţie, şi anume: calculul propoziţional, calculul funcţional de diferite ordine, aritmetica recursivă, axiomatica teoriei mulţimilor, intuiţionismul matematic. Dacă din punct de vedere al intensiunii (definiţiei) raportul dintre logica matematică şi logica tradiţională aproape că nu ridică probleme, din punct de vedere al extensiunii, între cele două există o deosebire esenţială.

După părerea mea, la Church nu este satisfăcută cerinţa adecvării în definiţie între intensiunea şi extensiunea termenului.

Se poate spune, în concluzie, că cei care includ logica matematică în domeniul matematicii, negând astfel legătura cu logica tradiţională, au în vedere fie faptul că ea utilizează metodele matematice, fie că ea se aplică cu o deosebită eficienţă în studierea problemelor matematice.

Dar aplicaţiile unei ştiinţe nu sunt de natură să reducă ştiinţa respectivă la domeniile la care ea se aplică, ceea ce în-

seamnă că trebuie luat în considerare şi celălalt aspect al problemei, cel legat de tipul metodelor folosite.

Se poate spune însă că o ştiinţă care aplică metode matematice este matematică? Sau că ea face parte din rândul disciplinelor matematice?

Iată ce scrie în acest sens Gh. Enescu în lucrarea sa *Logică şi adevăr*, prima lucrare în limba română destinată controverselor din fundamentele logicii şi ale matematicii: „A urmat din partea multora următorul raţionament: toate domeniile în care se aplică mijloacele aşa-zis *matematice* constituie ramuri ale matematicii, sunt matematică. Însă propoziţia că *dacă două ştiinţe folosesc mijloace comune ele au aceleaşi domenii de obiecte* n-a fost niciodată dovedită. În realitate, lucrurile pot să stea foarte bine în acest fel: anumite mijloace au apărut mai întâi într-o ştiinţă, ulterior ele s-au dovedit aplicabile şi în alte ştiinţe. După părerea noastră actualul proces de extindere a mijloacelor folosite în matematică (...) arată numai faptul că *şi alte ştiinţe s-au copt pentru a permite utilizarea unor astfel de mijloace*. Noi putem continua să folosim termenul de „mijloace matematice" însă aceasta nu va anula în nici un fel diferenţa dintre domenii ale raporturilor reale şi de aici diferenţa dintre diferite compartimente ale cunoaşterii" (18; 63).

În lucrarea de faţă voi încerca să dezvolt această idee şi să arăt, pe cât de exact posibil, ce este logic şi ce este matematic în ... logica matematică! Precizez, de aceea, că am luat termenul „logică matematică" în sensul de logică pură în care am inclus: logica propoziţiilor, logica predicatelor, logica claselor, logica relaţiilor, silogistica, logica modală şi polivalentă. La acesta s-ar mai putea adăuga şi unele abordări mai speciale cum ar fi logica fuzzy, de exemplu, sau logica combinatorică.

De ce cred eu că este necesar să discutăm aceste probleme?

Pentru că, istoric vorbind, orice metodă nouă în ştiinţă aduce cu sine o serie de exagerări şi de pretenţii nejustificate. Or, trebuie spus că singură, matematica nu poate rezolva problemele logicii şi aceasta din simplul motiv că *Logica* presupune întotdeauna ... logică! Vreau să spun că orice încercare de reelaborare a logicii pe baze matematice trebuie să satisfacă un minimum de cerinţe logice, altfel apare riscul ca aceste reelaborări să degenereze, cum s-a întâmplat nu odată, într-un formalism steril care, doar în aparenţă, îmbracă forme logico-matematice dar care, în realitate, nu are nici o valoare ştiinţifică.

Legat de aceste probleme voi încerca să dezvolt şi o altă idee, şi anume că nu toate metodele matematice sunt indispensabile logicii, că în multe situaţii atitudinea logicii faţă de ele este mai curând pragmatică decât teoretică. În asemenea situaţii este mai potrivit să vorbim despre „suficienţa" metodelor logicii decât despre necesitatea lor.

În fine, vom avea ocazia să vedem că o serie de probleme logice se dovedesc refractare la o abordare matematică.

Sunt necesare după aceste consideraţii câteva precizări în legătură cu semnificaţia termenului „metodă matematică". Am folosit până acum termeni ca „aplicaţie", „procedeu", „mijloace" ş.a., ceea ce, pentru o descriere generală a logicii, este şi suficient, însă, pentru a face cât mai inteligibil scopul lucrării se impun unele precizări suplimentare. În acest sens voi face mai întâi o succintă descriere a teoriilor ştiinţifice după care voi încerca să identific principalele tipuri de aplicaţii cu caracter matematic în logică.

Relativ la orice teorie, fie ea matematică sau logică, distingem:

1) Un anumit simbolism (în sensul de limbaj simbolic).

2) Un sistem de concepte. Dintre acestea unele au o anume prioritate, fie că este vorba de prioritate în sens deductiv (concepte prime şi nedefinite), fie în sens euristic.

3) Anumite procedee, în primul rând procedee de calcul deşi pot exista şi procedee destinate unor scopuri care nu presupun neapărat calculul (procedee de definiţie, de exemplu, de clasificare, de descriere etc.).

4) O anume formă de organizare a conţinutului (sistemul axiomatic este forma superioară de organizare deductivă a unei teorii).

Atunci când vorbim despre o aplicaţie cu caracter matematic în logică noi avem de-a face cu unul sau altul din aceste nivele în perspectiva cărora identificăm anumite metode. Să luăm, pentru exemplificare, cazul aritmeticii. Păstrând ordinea de mai sus, distingem următoarele aplicaţii cu caracter aritmetic în logică:

1) Aplicaţii ale unora dintre simbolurile limbajului aritmetic (0, 1, • , +, -, = ş.a.).

2) Aplicaţii ale conceptelor generale de *număr*, *mulţime*, *relaţie* etc., ale unor numere şi operaţii cu numere, ca şi ale unor predicate numerice.

3) Aplicaţii ale unor procedee aritmetice, cum ar fi: procedeul transcrierii dintr-un sistem de numeraţie în altul sau anumite scheme recursive.

4) Aplicaţii ale unor principii din axiomatica teoriei numerelor, cum este principiul inducţiei matematice, de exemplu.

Toate aceste aplicaţii cu caracter aritmetic le putem reuni sub denumirea de „metodă aritmetizării în logică" (într-un mod asemănător putem vorbi şi despre „metoda teoriei mulţimilor").

Sigur că schema prezentată este mai curând o idealizare pentru că sunt destul de rare cazurile în care o teorie matematică generează toată gama de aplicaţii pe care le-am invocat mai sus. De regulă, ele se opresc la unul sau altul din aceste nivele, situaţie în care asociem termenul „metodă" conceptu-

lui sau procedeului matematic a cărui aplicabilitate logică o urmărim. Vorbim astfel despre „metoda structurilor matematice", „metoda funcţiilor recursive", „metoda algoritmică" ş.a.

Se poate foarte bine întâmpla ca unele dintre aceste metode să fie matematice doar prin origine, altfel, ele să ţină în egală măsură atât de matematică cât şi de logică. Ca să înţelegem mai exact cum stau lucrurile voi distinge între următoarele două nivele la care se poate situa o metodă.

Un prim nivel este al aplicaţiei efective prin care reuşim în mod concret să rezolvăm o problemă (vezi aplicarea formelor normale în logică, relativ la problema deciziei). Aceste metode au un caracter particular şi întotdeauna în faţa unei probleme noi suntem interesaţi de găsirea unor astfel de metode. Deşi diferite ca finalitate de metodele din matematică, între ele pot exista totuşi o serie de proprietăţi comune, de aceea, va trebui să distingem şi un al doilea nivel, cel legat de tipul metodei. Acest „tip" este dat de ansamblul proprietăţilor comune pe care le au metodele în cauză. Se ştie, de exemplu, că în logică nu se aplică decât cu foarte puţine excepţii metode efectiv matematice, cum ar fi anumiţi algoritmi din teoria numerelor, să zicem, totuşi, trăsăturile generale ale algoritmilor numerici se regăsesc în cazul unor cunoscute procedee logice ceea ce ne dă dreptul să vorbim despre *metoda algoritmică* în logică.

La fel se întâmplă cu *metoda axiomatică* pe care nu o transpunem pur şi simplu din matematică în logică, pentru că ar însemna să aplicăm în logică sistemele axiomatice din matematică, ceea ce este, evident, absurd. În toate aceste cazuri noi nu avem de-a face cu metode efectiv matematice, ci cu metode de tip matematic, dar a căror aplicabilitate este strict logică. Trecerea de la tipul metodei (care poate fi matematic) la aplicarea efectivă a ei (care este logică) este determinată de specificul entităţilor de care se ocupă logica şi care diferă,

cum s-a văzut, de specificul entităţilor matematice. Nici o metodă matematică nu poate avea aplicabilitate logică atâta vreme cât ea nu este asimilabilă conţinutului logicii şi adaptată, în felul acesta, obiectului său. Deosebirile de obiect dintre cele două ştiinţe determină, în ultimă instanţă, deosebirile dintre metodele lor, chiar dacă în planul descrierilor foarte generale aceste metode nu se deosebesc prea mult.

I. SIMBOLISMUL ŞI LOGICA

1. CONSTITUIREA SIMBOLISMULUI LOGIC

Spre deosebire de matematică, logica a evoluat mult timp fără un sistem propriu de notaţii care să se constituie, prin acumulări succesive, în ceea ce numim astăzi un *limbaj simbolic*. Există, desigur, unele excepţii, mai ales în silogistică, dar acestea sunt încă departe de ceea ce se cheamă în mod obişnuit un *limbaj*.

Nu aş putea spune că există un acord în ceea ce priveşte modul de înţelegere a naturii simbolurilor în logica tradiţională. Lukasiewicz, de exemplu, era de părere că acestea apar încă la Aristotel şi că ele se apropie, prin modul de utilizare, de conceptul matematic de variabilă: „Introducerea variabilelor în logică – notează Lukasiewicz – este una dintre cele mai mari inovaţii ale lui Aristotel. Este de-a dreptul incredibil că până acum, cel puţin din câte ştiu eu, nici un filosof sau filolog nu a atras atenţia asupra acestui important fapt. Îndrăznesc să spun că ei au fost slabi matematicieni pentru că orice matematician ştie că introducerea variabilelor în aritmetică a început o nouă epocă în această ştiinţă“ (48; 3).

Adevărul este că atât în *Analitica Primă*, cât şi în *Analitica Secundă*, Aristotel foloseşte un gen de variabile pentru termeni însă el nu distinge suficient de clar între statutul de constantă şi cel de variabilă al unui simbol.

Nici Aristotel şi nici urmaşii lui nu au aprofundat aceste probleme, motiv pentru care limbajul logicii a rămas timp de mai bine de două mii de ani limbajul natural, iar utilizarea simbolurilor a fost sporadică şi limitată la o categorie destul de restrânsă de probleme.

Uneori însă abordarea prin limbajul natural a atins un nivel destul de ridicat de precizie. Să nu uităm că tot Aristotel este cel care a dat silogisticii o asemenea organizare încât a stârnit entuziasmul lui Kant făcându-l să afirme că, de la Aristotel, logica nu a făcut nici un pas înainte şi nici unul înapoi. Ea a ieşit perfectă din capul lui Aristotel, au adăugat apoi contemporanii, aşa cum Pallas Athena a ieşit cu suliţă şi scut din capul lui Zeus.

La rândul lor, medievalii ajunseseră la un asemenea rafinament încât, în anumite probleme cel puţin, cu greu ar putea fi întrecuţi astăzi.

Pentru un conservator care ar vrea să spună că nimic nu este nou sub „soarele logicii", toate aceste rezultate ar putea constitui puternice puncte de sprijin.

Dar dacă lucrurile stau într-adevăr astfel, se ridică în mod firesc câteva întrebări:

1) Ce anume a făcut necesară introducerea limbajelor simbolice în logică?

2) În ce măsură simbolismul este indispensabil problemelor logicii?

3) Este simbolismul propriu logicii sau el este un „împrumut" din matematică?

Nu se poate răspunde în mod satisfăcător acestor probleme fără să se facă o analiză atentă a situaţiilor concrete care au impus logicii noul tip de limbaj.

Tot ce putem spune deocamdată este că resorturile care au împins logica pe acest drum au fost acumulările la nivelul conţinutului. Câtă vreme conţinutul logicii se rezuma la ceea ce ne relevă logica tradiţională, inovaţiile la nivelul limbajului nu s-au bucurat de un succes prea mare.

Exemplul cel mai semnificativ din acest punct de vedere ni-l oferă Leibniz, primul autor până în sec. XIX preocupat de construirea unui simbolism adecvat nevoilor logicii. Ideile lui

stârnesc şi acum admiraţia cercetătorilor putând prefaţa într-un mod onorabil multe din temele logicii moderne de astăzi.

Voi reveni pe larg asupra problemelor ridicate de Leibniz, deocamdată vreau să fac câteva aprecieri generale cu privire la originea principalelor lui contribuţii în domeniul logicii şi la influenţele pe care le-a resimţit el din partea lui Descartes şi Lullus.

Deşi merge pe o cu totul altă cale, Leibniz este inspirat de Descartes în ideea de „characteristica universalis" şi de „mathesis universalis".

Se ştie că Descartes nu încearcă să reformeze logica, pe care într-o anumită măsură o subestimează, ci metoda. În acest sens, el merge pe două planuri. Pe de-o parte caută să surprindă însuşirile gândirii matematice (pornind de la calculul şi demonstraţiile geometrice), iar pe de altă parte încearcă să generalizeze simbolismul utilizat în algebră.

Descartes are în vedere atât creaţia matematică, pe care o vede avansând din intuiţie în intuiţie, cât şi exprimarea simbolică, exactă.

Din analiza gândirii el scoate regulile metodei, care la nivel foarte general au un caracter euristic, însă pe măsură ce se apropie de probleme concrete ele devin din ce în ce mai exacte.

Punând accent pe intuiţie, Descartes neglijează logica, dar îl va stimula pe Leibniz în cercetarea formelor logice şi în corelarea acestora cu conceptele matematice şi cu limbajul folosit în matematică.

Se poate spune că Descartes este mai aproape de intuiţionismul logico-matematic pentru care cadrul strict logic este ceva secundar. Leibniz, dimpotrivă, este mai aproape de formalism şi logicism. Simbolismul său este alimentat de trei mari surse: *a*) logica aristotelică (mai bine spus, logica tradiţională), *b*) analogiile dintre operaţiile, respectiv, relaţiile

aritmetice şi cele logice, şi *c*) propriile sale intuiţii asupra demersului logic.

Merită să-l invocăm aici şi pe R. Lullus (1235 - 1315), autorul care îl inspiră pe Leibniz în ideea de *alfabet*.

În prima parte a lucrării sale *Ars magna et ultima*, numită *Alfabetum*, Lullus studiază „principiile" sau „termenii principali". Combinatorica acestor principii sau termeni este o altă idee majoră pe care Leibniz i-o datorează lui Lullus.

Limitarea la logica aristotelică, în primul rând la teoria silogismului categoric, s-a dovedit a fi o frână pentru Leibniz. Analogiile logico-aritmetice l-au îndepărtat de crearea unui simbolism specific logicii, deşi l-au ajutat să ducă destul de departe ideile de *calcul*, *demonstraţie formalizată* şi chiar de *model*.

Faptul că structurile logice, axate pe propoziţii şi relaţii între propoziţii, s-au dovedit asemenea structurilor matematice, în speţă aritmetice, l-au apropiat pe Leibniz de un anume formalism. Specificul logicii stă în natura entităţilor sale, structurile pure fiind un loc comun în relaţiile dintre cele două ştiinţe.

Dacă modelul structurii este logica, atunci şi limbajul logicii trebuie să fie altceva decât limbajul matematicii. Or, pentru Leibniz, limbajul logic este în mare măsură tributar limbajului matematic, de aceea Leibniz nu a putut să rezolve până la capăt problema simbolismului logic.

După Leibniz, eforturile în direcţia introducerii simbolismului au fost continuate de Lambert, Holland, Castillon ş.a., care au mers pe aceeaşi linie, a analogiilor dintre operaţiile logice şi cele aritmetice. Succesele lor nu sunt notabile, aşa că următorul moment important în dezvoltarea simbolismului logic îl constituie George Boole şi Augustus de Morgan. Ei vor muta centrul de greutate al discuţiilor de la analogiile de ordin aritmetic la cele de ordin algebric.

În *The mathematical analysis of logic* (1847), Boole pune problema construirii unui calcul prin care să poată obţine propoziţii adevărate plecând de la alte propoziţii prin eliminarea anumitor termeni. În acest scop, el consideră propoziţiile logice ca identităţi între clase, un fel de ecuaţii cum am spune astăzi. Simbolismul pe care îl utilizează el este adecvat în primul rând reprezentării claselor şi relaţiilor dintre clase. Astfel „1" şi „0" reprezintă clasa univers, respectiv, clasa vidă, iar x, y, z, ... sunt „simboluri elective" care selecţionează din universul de discurs elemente de un anumit tip.

Un rol aparte revine simbolului „v", care apare de cele mai multe ori pentru a sugera caracterul nevid al unei clase. El are un statut logic apropiat mai mult de constantă decât de variabilă.

Intersecţia claselor, notată cu „xy", este un semn compus care selecţionează din universul de discurs clasa acelor lucruri care sunt atât x cât şi y. Dacă valoarea unuia dintre simboluri este 1 sau 0 se obţin cazurile particulare $1x = x$ şi $0x = 0$, valabile şi pentru algebra numerică. Expresia „$x - y$", care corespunde scăderii din aritmetică, selecţionează lucrurile care sunt x fără a fi y. Condiţia, ca această operaţie să aibă sens, este ca cele două clase să fie disjuncte.

În sfârşit, $\bar{x}$ selecţionează numai lucrurile care nu sunt x şi se defineşte prin: $\bar{x} = 1 - x$.

Iată şi câteva exemple de expresii care sunt valabile atât pentru algebra numerică cât şi pentru algebra claselor:

1) $xy = yx$,
2) $x + y = y + x$,
3) $x(y + z) = xy + xz$.

În schimb, expresiile:

4) $x^2 = x$ (unde $x^2 = xx$),
5) $x(1 - x) = 0$

sunt limitative în raport cu algebra numerică. Expresia 5) corespunde principiului logic al noncontradicţiei şi se obţine din 4) prin regulile obişnuite de calcul. Dacă îl înlocuim pe „1 - x" cu $\bar{x}$ obţinem o formă mai actuală a acestui principiu: $x\bar{x} = 0$.

În *The mathematical analysis of logic*, ca şi în celelalte scrieri ale sale, Boole studiază câteva posibilităţi de interpretare a calculului său în diferite domenii de semnificaţii – durate, probabilităţi, propoziţii ş.a.

După cum demonstrează W. şi M. Kneale (42), interpretarea prin propoziţii adaugă calculului un principiu nou, şi anume principiul bivalenţei: $x = 1$ sau $x = 0$. Acest principiu, care este de fapt un principiu logic, nu este presupus de niciuna din celelalte interpretări.

Principalele categorii de semne din limbajul utilizat de G. Boole pot fi grupate după cum urmează:

1) semne pentru propoziţii şi lucruri: x, y, z ... .
2) semne pentru operaţiile intelectului: –, ×, +,... .
3) semnul pentru identitate: „ = ".
4) semne cu semnificaţie constantă: 1, 0, v.

La aceste semne se mai adaugă o serie de alte semne care nu au o interpretare directă (semnele pentru funcţii, de exemplu), ci doar ajută la prelucrarea matematică a semnelor interpretate.

Se observă că simbolismul lui Boole aparţine matematicii numerice sau, dacă acceptăm ideea larg răspândită astăzi cu privire la raportul dintre număr şi cantitate, acest simbolism aparţine matematicii cantitativiste. Aceasta nu înseamnă că aspectele calitative, de care se ocupă logica, se transformă

automat în aspecte cantitative, prelucrabile matematic. Marea inovaţie a lui Boole constă în ideea interpretării logice a simbolurilor şi în prelucrarea lor matematică pentru ca rezultatul acestor „prelucrări" să fie apoi reinterpretat logic. Următorul pasaj din cartea lui Boole, *An investigation of the laws of thought* exprimă cât se poate de clar această concepţie asupra calculului matematic în logică: „condiţiile raţionamentului valid, realizat cu ajutorul simbolurilor, sunt:

1) Simbolurile utilizate în expresii au o interpretare, iar legile de combinare a lor sunt corect determinate din această interpretare.

2) Procesul formal de rezolvare sau demonstrare este efectuat conform legilor determinate mai sus, fără a se ţine seama de interpretare.

3) Rezultatul final urmează a fi interpretat conform sistemului de interpretare dat la început" (6; 68).

După cum se poate observa chiar şi din acest scurt pasaj, Boole nu realizează o distincţie suficient de clară între „a demonstra" şi „a rezolva". Mi se pare corectă observaţia autorilor J. Corcoran şi S. Wood (15) potrivit căreia, la Boole nu există un criteriu clar al validităţii unei inferenţe. Calculul ecuaţional, adică metoda de a determina soluţii, se confundă la el cu procedeul demonstrativ, adică metoda de a determina consecinţe. Acest neajuns, esenţial pentru logică, rezultă din modul în care Boole înţelege rolul calculului matematic în rezolvarea problemelor logice.

Concomitent aproape cu Boole, Augustus de Morgan construieşte un calcul pentru silogistică în care cuantifică predicatele şi în care introduce, pe lângă termenii pozitivi, şi termeni negativi. Simbolismul său constă din următoarele categorii mai importante de semne:

1) Semne pentru termeni pozitivi: X, Y, Z,... .

2) Semne pentru termenii negativi corespunzători: x, y, z,... .

3) Semne pentru propoziţiile categorice cu termeni pozitivi: (A_1, E_1, I_1 ,O_1) şi cu termeni negativi (A', E', I' ,O').
4) Semne pentru cuantorii universal şi particular: „)" şi „("
5) Semne pentru calitatea propoziţiei: „:" (afirmativ) şi „." (negativ).

Iată şi câteva exemple de transcriere a propoziţiilor de predicaţie în simbolismul de Morgan:

„X)) Y" (orice X este Y),
„X (.(Y" (unii X sunt Y),
„X).(Y" (nici un X nu este Y),
„X (.(Y" (unii X nu sunt Y).

Simbolismul lui de Morgan este greoi şi nu este de mirare că el nu a rezistat, totuşi ideea extinderii silogisticii prin introducerea de termeni negativi şi prin cuantificare nu a scăpat logicienilor de mai târziu. De asemenea, cunoscutele relaţii „de Morgan" au fost treptat generalizate şi se regăsesc astăzi în aproape toate teoriile de bază ale logicii.

Merite deosebite îi revin lui de Morgan şi în ceea ce priveşte logica relaţiilor, un domeniu logic mai puţin studiat până la acea dată.

Cercetările care i-au urmat lui de Morgan sunt legate în principal de numele lui Jevons, Grassman, Venn, Mc Coll, Poreţki ş.a., la un loc ele formează ceea ce numim astăzi „etapa algebrei logice". Sunt cercetări care au contribuit din diferite puncte de vedere la precizarea conceptului de *algebră booleană*.

Iată şi câteva din achiziţiile mai importante ale acestei etape în ceea ce priveşte constituirea simbolismului logic:

1) W. S. Jevons clarifică unele problemele rămase neelucidate la Boole şi introduce chiar elemente noi, atât în privinţa concepţiei de ansamblu cât şi a simbolismului. Semnul

„+", de exemplu, va corespunde la St. Jevons disjuncţiei neexclusive. În felul în care este definită, această operaţie impune o nouă lege logică: $x + x = x$. Împreună cu $xx = x$, introdusă deja de Boole, această lege va contribui hotărâtor la eliminarea coeficienţilor numerici din simbolismul logic. Trebuie spus că cele două legi sunt caracteristice pentru algebra binară, o ramură foarte importantă a algebrei moderne cu multiple aplicaţii în tehnica de calcul.

2) J. D. Gergone şi E. Schröder introduc semnul „⊂" pentru relaţia de incluziune dintre clase. Uneori, acest semn este folosit şi pentru a reda relaţii din logica tradiţională (relaţiile de subordonare dintre termeni sau de subalternare între propoziţii).

3) Hugh McColl foloseşte constantele „1" şi „0" pentru a marca valoarea logică a unei propoziţii. $A = 1$ şi $A = 0$ înseamnă: „propoziţia A este adevărată" (respectiv falsă). Semnul identităţii „=" este folosit de McColl pentru a simboliza echivalenţa propoziţiilor, iar A' înseamnă negaţia propoziţiei A. Relaţiile dintre propoziţiile A şi A' sunt redate prin expresiile $A\,A' = 0$ şi $A + A' = 1$. La rândul ei, implicaţia este notată cu „$A : B$" şi se citeşte „A implică B" sau „dacă A este adevărat, B este întotdeauna adevărat". În baza acestor simboluri, McColl construieşte un calcul algebric pentru logică similar în multe privinţe celui construit de G. Boole.

4) P. S. Poreţki încheie etapa algebrei logicii şi dă o nouă dezvoltare concepţiei lui G. Boole. Simbolismul lui nu diferă în mod esenţial de cel al lui H. McColl.

După unii istorici, etapa algebrei logicii s-ar încheia de fapt cu A. N. Whitehead, care, în *A treatise of abstract algebra* dezvoltă pe larg algebra propoziţiilor considerată de el o nouă ramură a algebrei moderne.

Pe măsură ce simbolurile s-au încetăţenit în logică au început să apară şi primele studii asupra simbolismului. De

numele lui Ch. S. Peirce, de exemplu, se leagă, între altele, şi apariţia semioticii logice. Tot Peirce este cel care va introduce simbolurile „Π", „Σ" pentru cei doi cuantori, universal şi particular. Semnul „Π" (de la produs) şi „Σ" (de la sumă) sunt puse în legătură cu produsul şi suma din logica propoziţiilor. Aceste simboluri au fost preluate de Lukasiewicz şi pot fi întâlnite şi astăzi în logică.

În paralel cu etapa algebrei logicii se derulează etapa „fundamentelor matematicii", etapă în care rolul central îi revine lui Frege.

Este greu de redat, fie şi în linii mari, ideile înnoitoare pe care le-a adus el în domeniul logicii şi al matematicii. Reţinem deocamdată că Frege este primul autor care a creat un simbolism special pentru logică. Diferenţa dintre simbolismul lui Frege şi simbolismul lui Boole se explică prin diferenţa de concepţie pe care cei doi autori au avut-o în privinţa raportului dintre logică şi matematică. Despre această problemă am vorbit însă în *Introducere*.

Iată, pe scurt, câteva dintre semnele de bază utilizate de Frege în logică:

(asertarea lui *A*),

(negaţia asertării),

(asertarea implicaţiei de la *B* la *A*);

φ a (asertarea universalităţii relativ la a: „pentru orice a are loc φ a") .

Aceste semne se compun, mai departe, în diferite moduri. Regulile lor de compunere sunt formulate în mod explicit de către Frege însă ele nu constituie o definiţie inductivă pentru noţiunea de „expresie în L".

Deşi, valabil în principiu, simbolismul lui Frege este cât se poate de nepractic – aplicat în matematică, acest simbolism duce la formule extrem de complicate care fac calculul imposibil – de aceea el nici nu a reuşit să se menţină. Totuşi, el a atras în mod corect atenţia asupra necesităţii utilizării simbolurilor în logică.

Pasul decisiv în constituirea simbolismului logic l-a făcut G. Peano. Întemeietorul aritmeticii axiomatizate a creat un simbolism simplu şi totodată foarte eficient, asemănător în multe privinţe cu simbolismul algebric obişnuit. Redau în continuare câteva din categoriile mai importante de semne folosite de Peano:

1) semne pentru variabile propoziţionale: $a, b,...; x, y,...; p, q,...;$
2) semne pentru adevăr şi fals: $\vee$, $\wedge$;
3) semne pentru operaţii: $\cap$, $\cup$ – (şi, sau, non);
4) semne pentru relaţii: $\subset$, $=$, ε ;
5) semne pentru exprimarea generalităţii $a \subset_{x, y...} b$ (pentru orice $x, y ..., b$ este implicat de a).

Simbolismul lui Peano a fost adoptat, cu unele modificări, de Russell şi Whitehead în *Principia Mathematica* (vol. I - III, 1910-1913), lucrare programatică în care logica modernă apare, în linii mari, constituită.

Chiar şi după apariţia *PM* s-au mai înregistrat unele achiziţii în domeniul simbolismului, însă acestea nu sunt, în principiu, indispensabile. O surpriză va produce, totuşi, scrierea fără paranteze a lui J. Lukasiewicz, care foloseşte simboluri literare pentru operatorii propoziţionali: Np, Kpq, Apq, Cpq etc.

Scrierea lui Lukasiewicz, foarte simplă şi elegantă, s-a dovedit potrivită mai ales expunerilor axiomatice din logica propoziţiilor şi din silogistică. Putem spune că ea este proprie logicii şi că marchează cea mai radicală deosebire faţă de scrierea matematică obişnuită.

Ne dăm seama, aşadar, că simbolismul nu este ceva specific matematicii, cum s-a crezut multă vreme, că el poate să apară şi în alte ştiinţe. În ceea ce priveşte logica, recursul la simboluri este determinat de nevoia de precizie în rezolvarea anumitor probleme dintre care cele mai multe nu apar în logica tradiţională. Achiziţiile la nivelul limbajului trebuie văzute, de aceea, în dependenţă de achiziţiile la nivelul problemelor (conţinutului). Numai când logica s-a văzut pusă în faţa rezolvării de noi probleme s-a putut vorbi de nevoia exprimării într-un nou limbaj. Până atunci, orice inovaţie în raport cu limbajul nu putea fi privită decât aşa cum a fost ea privită de fapt, şi anume ca o extravaganţă ce nu răspunde unor nevoi logice reale.

Este de presupus că simbolismul se va generaliza în logică şi va cuprinde domenii care încă nu se pretează la o abordare simbolică.

Dintre disciplinele care s-au impus în ultima vreme, atât în ce priveşte conţinutul de idei, cât şi limbajul, este logica modală. În afara simbolurilor specifice pentru operatorii modali, reţine atenţia noul simbolism destinat analizării unor aspecte semantice (vezi discuţia despre semantica lumilor posibile). La rândul ei, logica aplicată stimulează procesul dintr-o cu totul altă direcţie.

În paralel cu tendinţa de specializare a limbajului pe discipline şi teorii, se face simţită tendinţa de uniformizare a lui, ceea ce reprezintă o altă particularitate a dezvoltării logicii la ora actuală. La rândul lor, aplicaţiile cu caracter metalogic stimulează procesul dintr-o cu totul altă direcţie însă despre aceste probleme voi vorbi ceva mai departe.

2. TIPURI DE LIMBAJE SIMBOLICE ÎN LOGICĂ

Există în momentul de faţă câteva tipuri mari de limbaje simbolice asupra cărora mă voi opri pe scurt în cele ce urmează. Este vorba de limbajul Peano-Russell, de limbajul Lukasiewicz şi de limbajul aritmetic. Bineînţeles că la acestea se adaugă limbajul natural care intervine în diferite forme în construcţia logicii şi care se dovedeşte indispensabil introducerii oricărui simbolism.

Limbajul Peano-Russell este tipul cel mai răspândit astăzi în logică şi totodată cel mai apropiat de limbajul matematic uzual. Precizez că ceea ce dă tipul unui limbaj sunt în primul rând regulile de formare ale expresiilor şi abia, după aceea, natura simbolurilor. De altfel, definiţia inductivă a expresiilor în limbajul simbolic reprezintă una din principalele deosebiri faţă de limbajul natural.

În limbajul Peano-Russell se reproduce structura frazei din limbajul natural, mai precis, modul de legare a propoziţiilor în frază prin cuvintele de legătură „non", „şi", „sau", „implică" ş.a. Faptul că unele dintre operaţiile logice introduse prin aceste cuvinte au proprietăţi similare operaţiilor matematice a putut fi pus în evidenţă numai cu ajutorul simbolurilor. S-ar putea spune că aceasta este una dintre particularităţile limbajului Peano-Russell, importantă şi pentru alte aplicaţii cu caracter matematic în logică.

Relativ la definiţia limbajelor simbolice A. Church precizează: „un limbaj este definit atunci când avem o mulţime de simboluri primitive şi regulile de formare şi când avem ... semnificaţii pentru expresiile limbii respective" (13; 407).

Aşadar, condiţiile minime pentru construirea unui limbaj simbolic sunt: 1) lista de simboluri, 2) regulile de formare, şi 3) regulile de desemnare. Să exemplificăm aceste condiţii pe

limbajul logicii propoziţiilor în cadrul tipului de limbaj pe care îl analizăm aici.

Lista de simboluri primitive se compune din:
1) simboluri pentru variabile propoziţionale: P, Q, R,...;
2) simboluri pentru operatorii logici propoziţionali: ~ (non), • (şi), ∨ (sau), → (implică), ≡ (echivalent);
3) simboluri auxiliare: (,); [,]; { , };
4) Constantele *v* şi *f* pentru *adevăr* si *fals* (aici adevărul şi falsul se iau ca obiecte abstracte, fără să se ţină seama de definiţia conceptelor ca atare).

Reguli de formare:
R1. P, Q, R....sunt expresii.
R2. Dacă x şi y sunt expresii atunci, $\sim x$, $x \cdot y$, $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \equiv y$ vor fi de asemenea expresii.

Uneori se adaugă şi o regulă de „închidere" prin care se precizează că nici o altă expresie nu poate fi formată în afara regulilor de mai sus.

La un loc, aceste reguli formează o definiţie inductivă pentru conceptul de „expresie în L".

Iată şi câteva exemple de expresii în limbajul Peano-Russel:

$(P \cdot Q) \vee R$,
$(P \rightarrow Q) \vee \sim R$,
$[(P \rightarrow Q) \cdot R] \equiv (Q \vee R)$.

Reguli de desemnare:
R1. Simbolurile pentru variabile desemnează elemente din mulţimea {v, f}.
R2. Simbolurile ~, •, ∨, →, ≡ desemnează operaţiile logice: *non*, *şi*, *sau*, *implică*, *echivalent*.

În formularea celor două reguli am considerat ca semnificaţie a variabilelor cele două valori logice *v* şi *f*. În *Principia Mathematica* semnificaţia unei variabile propoziţionale este propoziţia însăşi, nu valoarea ei. Ambele procedee sunt în esenţă valabile, fiecare cu avantajele şi dezavantajele ei.

Ca o categorie aparte de reguli de desemnare pot fi considerate şi *regulile de adevăr*. Reamintesc că prin aceste reguli se stabileşte valoarea unei expresii compuse plecându-se de la valoarea elementelor ei componente. Pentru negaţie şi conjuncţie aceste reguli arată astfel:

1) Dacă $\sim P = v$ atunci $P = f$ (şi invers)
2) Dacă $P = Q = v$ atunci $P \bullet Q = v$ etc.

Prin „$P \bullet Q = v$" înţelegem că „$P \bullet Q$ este adevărată" sau că „$P \bullet Q$ îl desemnează pe v". Acest mod de exprimare este în spiritul concepţiei lui Frege pentru care propoziţiile adevărate (respectiv false) sunt nume diferite ale adevărului (respectiv falsului).

În limbajul logicii predicatelor, la simbolurile de mai sus se adaugă simboluri noi, specifice exprimării prin predicate. Ele se clasifică în următoarele patru mari grupe:
1) simboluri pentru variabile individuale: $x, y, z,...$;
2) constante individuale: $a, b, c,...$;
3) simboluri pentru predicate: $F, G, H,...$;
4) simboluri pentru cuantori: $\forall, \exists$.

În funcţie de scopurile urmărite, se mai pot adăuga şi alte simboluri, aici m-am limitat la strictul necesar.

Regulile de formare sunt şi ele asemănătoare celor invocate la început:

1) $F(x), G(x), H(x),...$sunt expresii.

2) Dacă A este o expresie în care apare liberă variabila x, atunci „$\forall xA$ şi $\exists xA$ sunt de asemenea expresii (prin „variabilă liberă" se înţelese variabila care nu este afectată de unul din cei doi cuantori).

Câteva exemple de expresii în limbajul logicii predicatelor:

$F(x)$, $G(x)$,
$\exists\, x\, F(x) \rightarrow H(y)$,
$P \vee \exists x\, F(x)$.

Cu ajutorul acestui limbaj pot fi studiate diferite structuri şi forme propoziţionale folosite la scară largă în limbajul natural. Aşa cum arată Gh. Enescu, „redarea raţionamentelor din limbajul natural în limbajul predicatelor este problema numărul unu a analizei logice moderne a gândirii intuitive. Ea este de o importanţă capitală pentru analiza logică şi formalizarea teoriilor ştiinţifice" (19; 95).

Într-un limbaj simbolic, sistemul de simboluri poate fi extins sau restrâns, după nevoie, pe baza unor definiţii. Se consideră, în general, că aceste definiţii nu aduc nimic nou din punct de vedere al conţinutului, că ele sunt simple abrevieri sau „convenţii tipografice", cum se afirmă în *Principia Mathematica*. Iată cum exprimă J. Lukasiewicz această idee într-una din lucrările de început ale logicii matematice: „Dacă există o teorie în care definiţiile nu apar, atunci nimic nou nu poate fi obţinut în teorie, după introducerea definiţiilor, cu excepţia faptului că forma unor teoreme poate fi schimbată ca urmare a înlocuirii definiendumului cu definiensul" (47; 32).

În prefaţa la ediţia a doua a *Principiei Math.*, Bertrand Russell pune problema reducerii simbolismului logic la simbolul „ / " pentru operatorul lui Scheffer. O asemenea reducţie nu sporeşte însă cu nimic claritatea şi eficienţa limbajului, dimpotrivă, se poate spune că utilizarea unui singur simbol

are ca rezultat expresii foarte complicate, greu de mânuit în calcul şi destul de îndepărtate de intuiţia logică.

Legat de acest aspect trebuie să discutăm şi o altă problemă, şi anume problema raportului dintre semnificaţia şi sensul expresiilor într-un limbaj simbolic.

Se ştie că semnificaţiile expresiilor care intră într-o definiţie este aceeaşi, dar nu se poate spune că şi sensul expresiilor este acelaşi. Una este să afirmi „$P \bullet Q$", de exemplu, şi alta „~ (~P \ ~Q)", deşi aceste expresii sunt echivalente logic (au aceeaşi semnificaţie). Acelaşi lucru este valabil şi pentru expresiile $\forall x\, Fx$ şi $\sim\exists x\, \sim Fx$ din logica predicatelor. Ceea ce înseamnă că logica sensurilor nu ţine întotdeauna seama de logica semnificaţiilor.

Câteva observaţii, în încheiere, asupra limbajului lui Lukasiewicz. Acest limbaj diferă de limbajul Peano-Russell atât în privinţa regulilor de formare, cât şi a sistemului de simboluri. În plus, el nu conţine paranteze, ceea ce este, iarăşi, o mare diferenţă.

Alfabetul lui conţine simboluri pentru variabile (p, q, r, ...) şi simboluri pentru operatorii logici cunoscuţi: N (*non*), K (*şi*), A (*sau*), C (*implică*), E (*echivalent*). La acestea se mai adaugă cei doi cuantori Π, Σ, deşi ei sunt mai puţini utilizaţi în logica propoziţiilor.

Regulile de formare se enunţă asemănător regulilor exemplificate deja:

1) p, q, r,... sunt expresii;
2) Dacă x, y sunt expresii atunci Nx, Kxy, Axy, Cxy şi Exy vor fi, de asemenea, expresii.

În continuare, câteva exemple de „traduceri" din limbajul Peano-Russell în limbajul Lukasiewicz:

$p \bullet (q \bullet r)$	KpKqr
$p \rightarrow (p \vee q)$	CpApq
$p \rightarrow [\sim p \equiv \sim(p \vee q)]$	CpENpNApq.

În acest gen de scriere lipsesc parantezele, operatorul se plasează înaintea variabilelor, iar citirea formulei începe de la ultimul operator din dreapta spre primul din stânga.

Limbajul este foarte simplu şi permite cele mai elegante prezentări ale sistemelor axiomatice din logica propoziţiilor şi a predicatelor.

Deşi prezintă toate caracteristicile unui limbaj simbolic, limbajul lui Lukasiewicz reprezintă totuşi cea mai radicală deosebire a simbolismului logic faţă de simbolismul matematic uzual. Lukasiewicz îl va extinde şi asupra silogisticii unde expresiile Asp, Esp, Isp şi Osp corespund celor patru propoziţii de predicaţie.

Simbolurile A, E, I, O unifică cuantorul cu copula (ex. „toţi ... sunt", „unii ... nu sunt..." etc.), dând un fel de operatori logici care pot fi studiaţi în manieră pur formală. Diversele modele matematice ale silogisticii au putut fi construite plecându-se tocmai de la proprietăţile formale ale acestor operatori.

3. LIMBAJUL ARITMETIC ÎN LOGICĂ

La începutul acestui capitol am făcut unele consideraţii cu privire la contribuţiile aduse de Leibniz la dezvoltarea simbolismului logic. Printre preocupările lui, un loc important îl ocupă încercarea de-a introduce în logică limbajul aritmetic. Logica modernă a reluat aceste idei, la alt nivel, se înţelege, şi în alţi termeni, deschizând un câmp larg aplicaţiilor cu caracter aritmetic.

Trebuie spus de la început însă, că ceea ce se utilizează aici nu sunt numerele ca atare (conceptele), ci simbolurile lor, adică cifrele. Atât la nivel semantic cât şi sintactic, aplicaţiile cu caracter aritmetic vizează, cu prioritate, limbajul. Voi încerca să demonstrez acest lucru în cele ce urmează luând drept cadru de referinţă câteva dintre cele mai cunoscute teorii logice.

O întrebare se ridică de pe acum în raport cu toate aceste aplicaţii: limbajul aritmetic are în logică aceeaşi destinaţie cu limbajele examinate până acum sau el vizează un cu totul alt gen de probleme?

3.1. LIMBAJUL ARITMETIC LA LEIBNIZ

Relativ la propoziţia categorică „*S* este *P*", Leibniz formulează următoarea problemă: dat fiind un termen oarecare *T* să se determine toate predicatele lui, în cazul în care termenul apare în propoziţie în postura de subiect logic, respectiv, toate subiectele lui în cazul în care termenul apare în postura de predicat.

Este de departe vizibil că această problemă nu mai este de natură aristotelică şi că ea nu poate fi rezolvată în limitele şi cu mijloacele logicii tradiţionale.

Din felul în care este ea formulată, predicatele unui subiect apar ca un fel de divizori ai unui număr, iar subiectele unui predicat ca multipli ai lui. De fapt, procedeul lui Leibniz se bazează tocmai pe analogia cu ideea de diviziune şi multiplicare, cum vom avea ocazia să vedem în cele ce urmează.

Leibniz consideră termenii unei propoziţii în sensul logicii tradiţionale, ca expresii ale unor concepte, numai că la el conceptele se împart în două categorii: 1) concepte prime şi nedefinite şi 2) concepte compuse din concepte prime.

Conceptele din prima categorie sunt numite „termeni primi" şi, la un loc, ele formează ceea ce Leibniz va numi mai târziu „alfabetul gândirii umane".

Termenii sunt ordonaţi pe clase, după cum urmează:
Prima clasă: cuprinde toţi termenii primi.
A doua clasă: cuprinde perechi de termeni din prima clasă.
A treia clasă: cuprinde triplete de termeni din prima şi a doua clasă ş.a.m.d.

Pentru a face pe deplin inteligibil procedeul său, Leibniz introduce simboluri literare (*a*, *b*, *c*,...) pentru termenii primi. Astfel, a doua clasă va cuprinde perechile ordonate: (*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *c*),...; a treia clasă cuprinde tripletele: (*a*, *b*, *c*), (*a*, *c*, *b*), (*b*, *c*, *d*), (*a*, *c*, *d*) etc.

Predicatele unui subiect sunt, fie termeni primi, fie termeni derivaţi din termeni primi, în funcţie de modul în care se formează subiectul. Dacă „*abc*" formează termenul *A*, să zicem, atunci predicatele lui vor fi *a*, *b*, *c*, *ab*, *ac*, *bc*, *abc*. Se obţin deci propoziţiile:

"*abc* este *a*,"
"*abc* este *b*,"
"*abc* este *ab*"
.....

Înţelegem acum de ce susţine Leibniz că propoziţiile logice adevărate sunt, fie propoziţii de identitate, fie propoziţii reductibile la propoziţii de identitate.

Pe de altă parte, propoziţiile logic adevărate sunt propoziţiile în care predicatul este cuprins în subiect (*predicatum inest subjecto*).

În *De arte combinatorica*, Leibniz încearcă să aplice procedeul său sistemului de definiţii din *Elementele* lui Euclid. Termenii primi sunt numerotaţi (un fel de aritmetizare

pregödeliană), iar definiţiile se obţin în baza diferitelor corelaţii dintre numere. Astfel, prima clasă cuprinde o enumerare de 27 concepte ale geometriei euclidiene: 1. *Punct*, 2. *Spaţiu*, 3. *Între*, 4. *Adiacent*, 5. *Depărtat*, 6. *Extremitate*, ..., 26. *Comun*, 27. *Progresie*.

A doua clasă constă, cum am văzut, din perechi de numere din prima clasă. Dacă luăm perechea (9, 14) vom obţine definiţia termenului „cantitate" întrucât „cantitatea este numărul părţilor". Aici „parte" are numărul 9, iar „număr", 14.

A treia clasă cuprinde termeni cum ar fi termenul „interval" definit prin tripletul (2, 3, 10) care corespunde definiţiei: „intervalul este spaţiul dintre întreguri".

Leibniz foloseşte în aceleaşi scopuri fracţiile ordinare al căror numărător indică clasa, iar numitorul indică numărul din clasa respectivă. Astfel, 1/10 va însemna al zecelea termen din prima clasă, adică termenul „parte". Numărul fracţionar $1/3 \cdot 1 \cdot 2$ este numărul asociat definiţiei segmentului („distanţa dintre două puncte").

Dacă prin simplificare fracţiile sunt identice, atunci şi conceptele asociate lor sunt identice prin definiţie.

În *Elementa calculi*, Leibniz încearcă să demonstreze că termenii se compun în propoziţie într-o manieră similară operaţiei de înmulţire din aritmetică. Cele două lucrări conţin, în germene, ideile de aritmetizare şi de calcul pe care le va dezvolta în diferite modalităţi mai târziu.

În *Regulae de bonitate consequentiarum*, Leibniz duce până la capăt ideea de model aritmetic pentru silogistică, idee preluată în secolul nostru de către J. Suplecki. De altfel, multe dintre ideile lui Leibniz vor constitui puncte de plecare pentru abordările cu caracter matematic de mai târziu.

3.2. LIMBAJUL ARITMETIC ÎN LOGICA PROPOZIȚIILOR

Pentru desemnarea celor două valori logice (adevărul şi falsul) se folosesc de regulă simbolurile *v* şi *f*, însă pot fi folosite în acest scop orice fel de simboluri.

Nu are importanţă notarea ca atare, ci raporturile formale pe care cele două obiecte abstracte le stabilesc relativ la diferitele operaţii logice.

Se obişnuieşte astăzi ca pentru desemnarea lor să se folosească cifrele. Am văzut că încă în secolul al XIX-lea, Hug McColl nota adevărul cu 1, iar falsul cu 0. Acest procedeu s-a încetăţenit între timp şi a dat naştere la alte aplicaţii cu caracter aritmetic în logică.

În primul rând, au fost reinterpretate aceste simboluri conform semnificaţiilor lor iniţiale, iar operaţiile logice au putut fi redate în forma unor operaţii aritmetice. De exemplu, la A. N. Prior aceste corelaţii logico-aritmetice sunt folosite în teoria funcţiilor de adevăr: „Dacă 1 şi 0 au sensul lor uzual, spune Prior, simbolul K definit prin K11 = 1, K10 = K01 = K00 = 0, ar putea fi reprezentate complet prin operaţia de înmulţire şi nu este dificil să găsim operaţii aritmetice care să înlocuiască într-un mod analog şi alţi operatori logici. De exemplu, am putea obţine ecuaţiile N1 = 0 şi N0 = 1 dacă interpretăm pe N ca pe operaţia de scădere din 1. Şi pentru că ştim că Cpq are aceeaşi valoare cu NKpNq, putem găsi o interpretare aritmetică pentru Cpq. Aceasta este: Cpq = 1 – p(1 – q)" (57; 230).

Urmând sugestiile lui Prior din acest pasaj, obţinem următoarele definiţii aritmetice pentru principalii operatori logici:

Np = 1 – p,
Kpq = pq,

$Apq = p + q - pq$,
$Cpq = 1 - p(1 - q)$,
$Epq = (1 - p) - q(1 - 2p)$.

Definiţiile în cauză se sprijină pe anumite analogii dintre operaţiile logice definite pe mulţimea $\{v, f\}$ şi operaţiile aritmetice definite pe mulţimea $\{1, 0\}$.

Menţionez ca o curiozitate faptul că în reprezentarea aritmetică a adevărului şi falsului putem inversa raporturile notând adevărul cu 0 şi falsul cu 1. Vor apărea atunci aceleaşi expresii aritmetice, însă fiecare va corespunde dualului expresiei iniţiale. Dacă „p + q – pq" a corespuns disjuncţiei, în primul caz, acum ea va corespunde conjuncţiei. Acest lucru apare foarte clar în tabelul de mai jos:

A	B	C
$\sim p$	$1 - p$	$\sim p$
$p \bullet q$	pq	$p \vee q$
$p \vee q$	$p + q - pq$	$p \bullet q$
$p \rightarrow q$	$1 - p + pq$	$\sim(p \rightarrow q)$

Relaţiile A – B corespund definiţiilor aritmetice în convenţiile obişnuite, adică $v = 1$ şi $f = 0$. Relaţiile C – B corespund definiţiilor aritmetice în convenţia $v = 0$ şi $f = 1$, iar relaţiile A – C corespund relaţiilor de dualitate. Toate celelalte probleme rămân aceleaşi, singurul aspect important constituindu-l raportul de dualitate obţinut prin inversarea semnificaţiilor.

Câteva observaţii, în încheiere, pe marginea definiţiilor logico-aritmetice de mai sus.

În primul rând, trebuie spus că aceste definiţii se datorează faptului că, împreună, negaţia şi conjuncţia transcriu orice alt operator propoziţional. Totuşi, analogiile dintre ope-

raţiile logice şi cele aritmetice se limitează la cele două operaţii logice menţionate fără să fie valabile în rest. Dacă pentru conjuncţie interpretarea aritmetică permite redarea tuturor proprietăţilor ei formale, pentru implicaţie – relaţia fundamentală a logicii – aceste proprietăţi nu mai sunt „transparente". Vreau să spun că din expresia „1 – p(1 – q)", care corespunde implicaţiei, nu ne putem da seama că implicaţia este o relaţie reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă şi că, de asemenea, nu se poate vorbi de proprietatea contrapoziţiei şi nici de regulile de deducţie bazate pe implicaţie.

Înţelegem deci că nu este vorba de o „aritmetizare" a logicii în sensul dizolvării ei într-un fragment al aritmeticii, ci doar de un sistem foarte limitat de analogii, utile până la un punct, dar care nu ne dau dreptul să trecem peste diferenţele mari dintre cele două ştiinţe. De regulă, aceste analogii privesc un număr restrâns de operatori, cum s-a putut observa, pentru care pot fi găsite încă multe alte interpretări. Pentru că ele nu prezintă un interes prea mare pentru logică nu insist mai mult asupra lor.

Un anume interes prezintă relaţia „≤" care ordonează mulţimea {0, 1} corespunzătoare celor două valori logice. Pentru că, relativ la „≤", se pot defini conceptele de *min* (= minim) şi *max* (= maxim), operatorii propoziţionali se pot redefini astfel:

$p \bullet q = min\ (p,q)$,
$p \vee q = max\ (p,q)$,
$p \rightarrow q = min\ (1 - p, q)$, sau

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1 \text{ dacă } p \leq q, \\ 0 \text{ dacă } p > q. \end{cases}$$

Sunt importante aceste definiţii pentru logică?

Chiar dacă sunt mai puţin adecvate exprimării unor raporturi logice generale (raporturi inferenţiale, de exemplu), nu se poate nega importanţa lor în unele probleme de interes mai special.

În logica bivalentă, cel puţin, aceste definiţii pot fi aplicate cu succes în rezolvarea problemei deciziei, a minimizării expresiilor şi a altor probleme. În metalogică ele şi-au dovedit utilitatea în legătură cu demonstraţiile unor importante proprietăţi ale sistemelor axiomatice. În sfârşit, logica polivalentă utilizează la scară largă definiţiile aritmetice, mai ales că valorile de adevăr se notează aici cu numere reale din intervalul cuprins între 0 şi 1. Ele au permis construirea unei întregi „familii" de sisteme n-valente, deşi foarte puţine au o interpretare logică corespunzătoare.

3.3. LIMBAJUL ARITMETIC ŞI SISTEMELE DE NUMERAŢIE

Interpretarea valorilor logice prin valori numerice poate genera şi alte corelaţii decât cele examinate până acum. Unele dintre ele vizează posibilitatea transcrierii unui număr dintr-un sistem de numeraţie în altul. În articolul său, *Les lois arithmétique de la verité* (Analele Univ. Bucureşti, seria Acta Logica, nr. 7-8, 1964/65), Gh. Enescu oferă o astfel de aplicare a sistemelor de numeraţie în abordarea unor probleme de logică. În rezumat, procedeul lui Gh. Enescu constă în următoarele:

1) Se numerotează funcţiile de adevăr de la stânga la dreapta cu numere naturale obţinându-se astfel succesiunea: $f_0, f_1, f_2, ..., f_{15}$.

2) Se transcriu numerele de ordine ale funcţiilor din sistemul zecimal în cel binar, iar secvenţa de 0 şi 1 obţinută se consideră a fi valoarea funcţiei:

f_0 - 0000
f_1 - 0001
f_2 - 0010
.....
f_{15} – 1111 .

3) Numărul total de cifre din reprezentarea binară trebuie să fie 2^m, unde m reprezintă numărul valorilor logice. Dacă reprezentarea binară se face printr-un număr mai mic de cifre, se va adăuga cifra 0 de la stânga la dreapta până se va completa numărul de 2^m cifre.

4) Numărul total de funcţii se calculează după formula $N = 2^{m^n}$, unde m reprezintă numărul valorilor de adevăr, iar n numărul variabilelor.

Să notăm cu f_i' negaţia funcţiei f_i. În succesiunea funcţiilor $f_0, f_1, ..., f_{15}$ se pot stabili acum următoarele corelaţii:

$$f_i' = f_{max} - f_i$$
$$f_i + f_i' = f_{max}$$
$$f'_{max} = f_0; f_0' = f_{max}$$
$$f_i = f_i$$
$$f_i + f_i' = f_0.$$

În aceste relaţii, f_{max} este f_{N-1} şi corespunde tautologiei, iar f_0 corespunde contradicţiei.

Cititorul poate identifica cu uşurinţă în aceste relaţii expresia aritmetică a unor binecunoscute principii logice (principiul noncontradicţiei, terţului exclus etc.).

Interpretarea zecimală a funcţiilor de adevăr mai prezintă următoarele avantaje:

a) Se poate da o funcţie de adevăr numai prin numărul ei de ordine putându-se „calcula" apoi definiţia ei matricială, numărul de valori de adevăr şi numărul de variabile.

b) Procedeul poate fi extins şi asupra logicilor polivalente unde numărul funcţiilor de adevăr creşte impresionant. În sistemele trivalente cele mai cunoscute (Lukasiewicz, Bocivar, Kleene ş.a.) sunt studiate numai câteva dintre aceste funcţii, toate celelalte rămânând, practic, neutilizate. De altfel, într-un studiu ulterior, *Cu privire la reprezentarea cifrică a funcţiilor de adevăr* (Analele Univ. Bucureşti, 1982), Gh. Enescu revine asupra problemei dând unele precizări cu privire la unificarea sistemelor polivalente şi la posibilitatea interpretării lor unele prin altele.

3.4. ARITMETIZAREA GÖDELIANĂ

Mergând pe cu totul altă cale decât cea a analogiilor dintre operaţiile logice şi cele aritmetice, Gödel a elaborat un procedeu prin care sistemele formale de tipul *Principiei mathematica* să fie reprezentate aritmetic ca într-un fel de cifru. În esenţă, procedeul constă în asocierea simbolurilor prime şi expresiilor cu numere prime în baza unor reguli de corespondenţă precis formulate. Prin acest procedeu, Gödel a reuşit să arate că în aceste sisteme pot fi construite propoziţii care, deşi adevărate, nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate *în limitele şi cu mijloacele sistemului. Altfel spus, sistemele formale considerate sunt principial incomplete* (în supoziţia, evident, că ele sunt totuşi consistente).

Demonstraţia lui Gödel prezintă pentru logica matematică şi fundamentele matematicii cel mai important rezultat obţinut prin aplicarea unor procedee aritmetice.

Prima expunere a acestei demonstraţii, şi singura până acum, în literatura noastră de specialitate i-o datorăm lui Gh. Enescu (vezi *Teoria sistemelor logice*, pag. 256).

Gödel a plecat de la elementul esenţial al formalizării, aşa cum o concepuse Hilbert în raport cu matematica, şi anume de

la faptul că „pentru consideraţii matematice nu are importanţă ce obiecte sunt alese ca semne primitive, ceea ce înseamnă că putem utiliza în acest scop numere naturale. În consecinţă, o formulă va fi o secvenţă finită de numere naturale, iar o demonstraţie o secvenţă finită de secvenţe finite de numere naturale. Noţiunile (respectiv propoziţiile) matematice vor deveni astfel noţiuni (respectiv propoziţii) despre numerele naturale sau secvenţele acestora; ele pot fi (cel puţin în parte) exprimate prin simboluri ale sistemului *PM* însuşi. În particular, se poate demonstra că noţiunile *formulă*, *demonstraţie şi formulă demonstrabilă* pot fi definite în *PM*" (29; 607).

Din punct de vedere matematic, procedeul lui Gödel are la bază teorema fundamentală a aritmeticii, teoremă potrivit căreia orice număr întreg este sau prim sau un produs de numere prime. Dacă se asociază, aşadar, simbolurile de bază din alfabetul unui sistem formal cu numere prime, atunci oricărei expresii construite din aceste simboluri îi va corespunde un număr şi invers, orice număr descompus în factori primi va corespunde unei expresii.

Înainte de a da regulile de corespondenţă între mulţimea numerelor prime şi mulţimea simbolurilor voi face o succintă prezentare a sistemului formal *P*, varianta simplificată a sistemului *PM* pe care lucrează Gödel.

Semnele de bază ale sistemului sunt:

1) constantele ~ (non), $\vee$ (sau), Π (oricare), 0 (zero), şi f (succesor);
2) variabile de tip 1 pentru numere, inclusiv zero: x_1, y_1, z_1,...;
3) variabile de tip 2 pentru clase: x_2, y_2,...;
4) variabile de tip 3 pentru clase de clase: x_3, y_3,.... .

Funcţiile de două sau mai multe variabile, la fel ca şi relaţiile, nu fac parte din categoria semnelor prime.

În continuare se postulează următoarele corespondenţe între semne şi numerele prime:

„O".....1; „~".....5; „Π".....9;
„f".....3; „∨".....7; „(".....11; „)".....13.

Variabilelor de tip n li se asociază numere prime de forma p^n unde p este un număr prim mai mare ca 13. De exemplu, x_2 va avea numărul 17^2. Unei secvenţe de semne de bază care are numerele $n_1, n_2,...,n_k$ i se asociază produsul de factori primi $2^{n1} \times 3^{n2} \times ... \times P_k^{nk}$.

Să exemplificăm această regulă pentru expresia $x_2(x_1)$. Numărul n_1 asociat lui x_2 va fi 17^2; n_2 va fi 11; n_3 va fi 19, iar n_4 va fi 13. Deci numărul formulei $x_2(x_1)$ va fi $2^{17} \times 3^{11} \times 5^{19} \times 7^{13}$.

Notăm în continuare cu $\Phi(a)$ numărul gödelian al formulei a şi cu $R(a_1, a_2,..., a_n)$ o relaţie între semne prime sau secvenţe de semne prime. Acestei secvenţe i se asociază relaţia $R'(X_1, X_2,..., X_n)$ între numerele naturale $X_1, X_2, ..., X_n$ dacă şi numai dacă are loc condiţia $\Phi(a_i) = X_i$ (pentru i = 1, 2,..., n).

Acest mod de cifrare al simbolurilor şi expresiilor din *PM* este utilizat în construcţia propoziţiei indecidabile. Respectiva propoziţie asertează tocmai consistenţa sistemului, ceea ce înseamnă că în sistemele de tipul *PM* între consistenţă şi completitudine există o incompatibilitate de principiu.

Se pune în mod firesc întrebarea ce raport există între teorema lui Gödel şi procedeul aritmetizării?

Este clar că la această întrebare nu se poate răspunde simplu. Ce pot spune deocamdată este că teorema lui Gödel exprimă o proprietate fundamentală a sistemelor de tipul *PM* şi că demonstraţia ei presupune „aritmetizarea" sistemelor respective. Sunt reprezentate aritmetic diferite concepte şi propoziţii metateoretice dintre care una, cea care asertează consistenţa

sistemului, nu poate fi demonstrată. În supoziţia că ea ar fi totuşi demonstrabilă (şi că sistemul este astfel complet), ar urma ca sistemul să fie inconsistent. De aici raportul de contrarietate dintre consistenţă şi completitudine (cele două concepte nu pot fi asertate împreună despre unul şi acelaşi sistem, dar pot fi negate).

Dacă ţinem seama de precizarea lui Gödel că demonstraţia teoremei satisface criteriul intuiţionist al constructivităţii, atunci teorema este ea însăşi o consecinţă a aritmetizării pentru că aritmetizarea permite construirea efectivă a propoziţiei indecidabile.

Teorema lui Gödel are consecinţe dintre cele mai adânci, atât asupra logicii, cât şi asupra matematicii.

Din punct de vedere matematic, ea a zădărnicit, aşa cum am arătat în *Introducere*, programul hilbertian de reorganizare a matematicii în forma unor sisteme formale. Un astfel de sistem nu poate reproduce toate propoziţiile adevărate relativ la un anumit domeniu de obiecte pentru simplul motiv că el este principial incomplet.

În plan logic, teorema lui Gödel a stimulat descoperiri importante dintre care aş aminti soluţia negativă a problemei deciziei pentru calculul cu predicate de ordinul întâi (A. Church, 1936). Deosebit de interesante sunt şi implicaţiile acestei teoreme în problema paradoxelor. De altfel, în variantă neformalizată, Gödel expune rezultatul său în forma unui paradox. În lucrarea citată, Gh. Enescu arată cum se corelează paradoxul lui Gödel cu paradoxul mincinosului sau cu paradoxul lui Richard (relativ la procedeul raţionamentului diagonal). În sfârşit, teorema lui Gödel aduce o lumină nouă în problema adevărului demonstrând că sfera conceptului *adevăr* nu este aceeaşi cu sfera conceptului *demonstrabil*.

4. LIMBAJUL FORMALIZAT ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ

Termenul de „limbaj formalizat" a fost introdus de Alfred Tarski cu intenţia de a face deosebirea dintre limbajul natural şi limbajul teoriilor ştiinţifice, în primul rând al celor deductive. Principiile de construcţie pe care la postulează Tarski relativ la limbajul formalizat sunt următoarele:

1) „Pentru fiecare din aceste limbaje se indică sau descrie (în mod structural) toate semnele din care sunt compuse expresiile limbajului" (69; 172).

2) „Ţinând cont de proprietăţile structurale se delimitează în mulţimea expresiilor posibile acele expresii care pot fi numite propoziţii" (69; 172).

Termenul „propoziţie" apare aici pentru a păstra analogia cu limbajul natural, în mod obişnuit vorbim însă de „formule" sau „expresii" şi nu de „propoziţii".

Tarski face precizarea că, în general, limbajul şi teoria constituie un „întreg organic", astfel că, atunci când vorbim de un anumit limbaj formalizat, noi vorbim de fapt de limbajul unei anumite teorii (formalizate). Din această cauză proprietăţile limbajului se manifestă în strictă dependenţă de metoda de construcţie a teoriilor. Aceasta face ca la cele două principii de construcţie enunţate mai sus, Tarski să adauge alte două principii care vizează, de data aceasta, structura deductivă a teoriei. Ele se formulează după cum urmează:

3) "Se indică, sau se descrie structural, o anumită categorie de propoziţii numite *axiome* sau *propoziţii prime*" (69; 172).

4) "Se indică reguli speciale, numite *reguli de inferenţă*, care determină anumite operaţii ce permit transformarea propoziţiilor în alte propoziţii" (69; 172).

Propoziţiile obţinute ca urmare a aplicării regulilor de deducţie se numesc *consecinţe*. În raport cu axiomele, consecinţele se numesc *teze*.

În ceea ce priveşte semnificaţia semnelor şi a expresiilor se arată mai departe că: „acestor semne ale limbajului care fac obiectul consideraţiilor de faţă, noi le atribuim întotdeauna semnificaţii concrete şi inteligibile; expresiile numite propoziţii rămân propoziţii chiar şi atunci când sunt traduse în limbajul cotidian. Propoziţiile luate ca axiome ne apar ca fiind intuitiv adevărate; alegerea regulilor de deducţie este condusă de dorinţa de a asigura trecerea de la propoziţiile admise ca adevărate la noi propoziţii adevărate" (69; 173).

Acest pasaj este important nu numai pentru precizările aduse în problema semnificaţiei semnelor şi expresiilor, ci şi pentru modul în care subliniază legăturile foarte strânse dintre limbajul formalizat şi limbajul natural. De altfel, Tarski atrage atenţia asupra pericolului pe care îl prezintă pentru ştiinţă, în special pentru logică şi matematică, formalismul abstract, golit de orice legătură cu conţinutul. Se pare că această recomandare făcută de Tarski în primul studiu destinat limbajelor formalizate nu a fost prea mult respectată în anii din urmă. Iată ce scrie în acest sens Gh. Enescu în cunoscutul său *Dicţionar de logică*: „Ştiind cât de impresionat e omul de rând (sau, în general, cei nepricepuţi în „limbajul matematic"), simbolizarea şi formalizarea pot să dea impresia nejustificată de *profunzime* datorită ermetismului (adică a lipsei de comunicare). Pentru a preveni ermetismul şi superficialitatea în simbolizare şi formalizare este necesar să asigurăm trecerea şi, respectiv, introducerea într-un limbaj conceptual (intuitiv)" (22; 118).

În sinteză, limbajul formalizat apare definit la Tarski prin: *a*) lista de simboluri, *b*) regulile de formare, *c*) regulile de desemnare, *d*) axiomele şi regulile de deducţie. Această concepţie va suferi ulterior tot felul de modificări (sunt modi-

ficări impuse chiar de problemele pe care le ridică formalizarea diferitelor teorii ale logicii şi matematicii). O asemenea modificare, de exemplu, apare la Rudolf Carnap, pentru care limbajul formalizat este dat prin: *a*) lista de simboluri, *b*) regulile de formare, *c*) regulile de desemnare, *d*) regulile de domeniu şi *e*) regulile de adevăr. Gh. Enescu va introduce o modificare în sensul generalizării condiţiilor ce definesc limbajul formalizat, pentru el construcţia unui limbaj formalizat presupune minimum trei condiţii: *a*) lista de semne elementare, *b*) regulile de formare şi *c*) regulile de desemnare (sau semnificare). Încă odată, definiţia postulează doar condiţiile necesare ale unui limbaj formalizat, ea este deci mult mai generală decât definiţiile introduse mai sus.

Limbajul formalizat are, în opinia lui Tarski, câteva trăsături mai importante prin care se deosebeşte de orice alt tip de limbaj, în primul rând de limbajul natural:

1) Este *limitat* la un domeniu anume. Aceasta face ca el să nu poată exprima tot ceea ce în general poate fi exprimat (nu este *universal*, cu alte cuvinte).

2) Nu este *închis*. Conceptul de „închidere" în raport cu limbajul se referă la faptul că nu pot fi formulate în limbaj expresii care să se refere la limbajul însuşi. Tarski demonstrează că această particularitate este importantă pentru explicarea antinomiilor semantice.

3) Este *precis*. Prin regulile de formare şi de desemnare ştim de la început dacă o succesiune de simboluri este o expresie şi ce anume desemnează ea.

4) Relativ la limbajul formalizat pot fi definite într-un mod riguros o serie de concepte fundamentale ale logicii, cum ar fi conceptul de *validitate*, de *consistenţă*, de *consecinţă logică* ş.a.

5) Pornind de la sintaxa unui limbaj formalizat pot fi mai departe introduse noţiunile de *sistem sintactic* şi de *sistem*

formal. Primul se defineşte ca un sistem obţinut prin detaşarea sistemului de semne al unui limbaj formalizat de latura lui semantică. Sistemul formal va fi atunci orice sistem sintactic şi orice reprezentare sintactică a lui.

Astăzi, limbajele formalizate sunt utilizate la scară largă atât în logică, cât şi în matematică. Construcţia lor diferă de la autor la autor, însă principiul este în general acelaşi. Limbajul matematic este mai bogat, el îl conţine pe cel logic la care adaugă o serie de elemente specifice, în funcţie de complexitatea domeniului ce urmează a fi investigat. În ultima vreme, abordarea pe bază de limbaje formalizate tinde să se extindă şi asupra altor discipline, dovadă că metoda este pe cale de-a se generaliza.

5. CONCLUZII

Cele discutate până acum permit fixarea câtorva concluzii mai generale cu privire la locul şi rolul simbolismului în relaţiile dintre logică şi matematică.

1) În toate fazele dezvoltării ei, logica a demonstrat că nu se poate dispensa de un minim de simbolism. Primele simboluri apar încă la Aristotel, un fel de variabile pentru termeni, cum s-a spus pe bună dreptate. Important este că aceste simboluri nu vizau de la început ideea de funcţie, ca în matematică, ci ideea de formă logică. După părerea mea, conceptul de formă logică este unul din primele concepte ale logicii care reclamă utilizarea simbolurilor.

2) În cele mai multe ştiinţe care folosesc astăzi limbajele simbolice nu avem de-a face cu un simbolism specific, ceea ce intervine aici este tot simbolismul matematic. „Toate disciplinele ştiinţifice, arată Gr. Moisil, au fost obligate în momentul creării lor să-şi constituie un limbaj propriu, iar în

momentul deplinei lor maturităţi, acest limbaj a fost redus la limbajul matematic" (51; 73).

Logica a dovedit că se abate de la această regulă întrucât simbolismul pe care ea l-a adoptat este un simbolism specific care diferă, după cum s-a văzut, de cel matematic. Există şi alte ştiinţe astăzi care evoluează în aceeaşi direcţie.

3) Utilizarea simbolismului este importantă în logică şi sub un alt aspect. Foarte multe probleme ale logicii tradiţionale au putut fi reluate în formă simbolică, ceea ce a permis soluţionarea lor cu mijloacele logicii moderne. „Opera lui Lukasiewicz şi a urmaşilor săi, scrie Gr. Moisil, arată cât de mult adoptarea scrierii simbolice şi cunoaşterea logicii matematice pot contribui la înţelegerea gândirii lui Aristot, a unui Teofrast, şi a altora" (51; 421).

Într-adevăr, Lukasiewicz a reuşit să definească ideea modală de *posibil* plecând de la aserţiunile lui Aristotel din *Despre interpretare*, aserţiuni pe care le-a exprimat în formă simbolică. Iată deci că limbajul simbolic este în măsură să deservească şi alte compartimente ale logicii decât cele pentru care a fost introdus el în mod expres.

4) Analogiile limitate dintre logică şi aritmetică au permis utilizarea limbajului aritmetic în rezolvarea unor probleme mai speciale ale logicii. Acest lucru s-a realizat în două moduri: *a*) prin redarea operaţiilor logice în forma operaţiilor aritmetice şi *b*) prin asocierea de numere elementelor structurale ale limbajului (v. Leibniz, Gödel ş.a.). Şi într-un caz şi în celălalt limbajul aritmetic are o sferă destul de restrânsă de aplicaţie, el nu poate fi considerat un înlocuitor al limbajelor propriu-zis logice.

5) Este adevărat că logica a reprezentat şi continuă să reprezinte un câmp de experienţă pentru limbajul matematic, dar de aici nu rezultă că orice generalizare spre logică duce neapărat la rezolvarea de probleme noi. Simbolizarea de dra-

gul simbolizării poate duce la obscurități. Or, arăta la vremea lui Hilbert, simbolismul trebuie să ducă în logică la ceea ce a dus el în matematică, şi anume la tratarea cât mai exactă şi mai riguroasă a conţinutului ei.

6) Formele logice fiind universale, independente de domeniile particulare ale gândirii, este în interesul logicienilor să menţină comunicarea cu toate aceste domenii. Problema alegerii simbolismului nu este doar o necesitate internă a dezvoltării logicii, ci exprimă o nevoie de ordin pragmatic. Nu este în interesul nimănui blocarea logicii în relaţiile ei cu matematica şi izolarea de cei ce se ocupă de domenii matematizate. O concepţie justă în această privinţă a dezvoltat la noi tot Gr. Moisil: „...Limbajul logicii simbolice, având toate aceste caracteristici ale limbajului matematic ce-l face dezagreabil cititorului obişnuit, are în plus defectul de a fi deosebit de limbajul matematic, şi ca atare rămâne neinteligibil la prima lectură chiar pentru matematicianul rutinat" (51; 74). Or, tocmai de aceea de impune deschiderea logicii în ambele direcţii, atât spre matematică şi spre ştiinţele matematizate, cât şi spre ştiinţele nematematice.

7) Diversificarea simbolismului în logică nu trebuie privită ca o eliminare completă a limbajului natural. Dincolo de faptul că limbajul natural este o permanentă sursă de aplicaţii pentru logică, el este indispensabil în introducerea oricărui simbolism.

II. CONCEPTE FUNDAMENTALE ALE MATEMATICII ÎN LOGICĂ

Într-un domeniu ştiinţific oarecare pot să apară la un moment dat concepte şi metode care să fie multă vreme legate de domeniul respectiv, dar care, cu timpul, să poată fi generalizate dincolo de natura concretă a entităţilor în legătură cu care ele au apărut. Generalizarea se face în două moduri: fie că se extinde sfera de aplicabilitate a conceptelor respective, fie că se „extrag" anumite trăsături ale lor care sunt corelate apoi cu alte concepte şi procedee. Trebuie să distingem, aşadar, între originea conceptelor şi metodelor respective şi destinul lor ulterior. Desigur că aplicaţiile se pot întoarce asupra teoriilor de origine îmbogăţindu-le cu noi *fapte* particulare şi, în felul acesta, cu noi posibilităţi de generalizare.

Unele concepte ale matematicii tradiţionale, cum ar fi: *mulţime*, *funcţie*, *structură matematică* ş.a., au putut fi generalizate în sensul al doilea invocat mai sus. Excepţie face conceptul de *număr* care rămâne în continuare un concept specific matematicii şi ale cărui aplicaţii logice ridică, cum vom vedea, probleme mai speciale.

Cu ce eficienţă se aplică conceptele respective în logică şi cu ce limite?

Se poate spune că ele sunt indispensabile logicii sau doar că sunt utile pe anumite porţiuni?

Amatorul de logică şi filosofie a logicii recunoaşte importanţa acestor întrebări pentru înţelegerea actualelor raporturi metodologice dintre logică şi matematică.

Dacă toate aceste concepte se dovedesc a nu fi necesare logicii, înseamnă că atitudinea logicii faţă de ele este mai degrabă pragmatică decât teoretică. Cu alte cuvinte, sunt alese

mijloacele cele mai convenabile urmărindu-se în special criterii legate de eficienţă. Dacă, în schimb, avem în vedere aplicaţiile logicii în matematică, atunci este de înţeles că aceste concepte sunt preferabile, uneori chiar indispensabile. În domenii nematematice, însă, abuzul de asemenea concepte poate duce la obscurităţi, ceea ce justifică, într-un fel, aversiunea cercetătorilor din domeniile nematematizate faţă de metodele logice.

Rezolvă conceptele şi metodele matematice mai bine problemele logice sau rezolvă ele problemele care nu s-ar putea rezolva altfel?

Legat de această întrebare nu trebuie să confundăm posibilitatea ilustrării anumitor concepte matematice pe terenul logicii cu eficienţa aplicării acestor concepte. Datorită caracterului mai simplu al aplicaţiilor lor, matematica poate obţine un anumit profit, dar nu este sigur că şi logica ar putea avea un asemenea profit. Prin urmare, trebuie să distingem ceea ce este util matematicii de ceea ce este util logicii, iar, pe de altă parte, ceea ce este necesar logicii de ceea ce este doar util ei.

1. COCEPTUL DE MULŢIME ÎN LOGICĂ

Acest concept este de bază în matematică, însă el este atât de general încât pare mai apropiat de statutul categoriilor filosofice decât al celor strict matematice. Numai dezvoltarea teoriei mulţimilor ne poate duce de la ideea generală de mulţime la matematica propriu-zisă, mai precis, la o disciplină specială a ei.

Faptul că acest concept depăşeşte graniţele oricărui domeniu este arătat şi de dificultăţile care apar în legătură cu el, dificultăţi ce depăşesc competenţele matematicianului ce lucrează în „interiorul" matematicii trecând dincolo, în logică şi chiar în filosofie. Aceste dificultăţi încep chiar de la definiţia

conceptului de mulţime. În versiunea lui Cantor, de exemplu, mulţimea este „rezultatul cuprinderii într-un tot a unor obiecte determinate ale perceperii sau gândirii noastre; aceste obiecte se numesc elementele mulţimii".

Aplicată liber, definiţia duce la paradoxe, cum este paradoxul lui Russell, de exemplu, legat de mulţimea tuturor mulţimilor care nu se conţin pe sine (din supoziţia că această mulţime se conţine rezultă că ea ar trebui să nu se conţină, şi invers).

Redefinirea conceptului de mulţime s-a făcut pe cale axiomatică, astfel că, sunt considerate legitime doar mulţimile care satisfac condiţiile impuse prin axiome.

Există în axiomatizările curente câteva axiome care s-au dovedit indispensabile matematicii, cum ar fi:
Axioma extensionalităţii: Două mulţimi A şi B care au aceleaşi elemente sunt identice.

$$A = B =_{df} \forall x\,(x \in A \equiv x \in B)\,.$$

Axioma alegerii: Pentru orice mulţime A formată din mulţimi disjuncte două câte două există o mulţime B care conţine un singur element comun cu fiecare din mulţimile respective:

$$\forall A\,[A = \{a_1, a_2, \ldots\} \;\&\; \forall_{i,j}\, a_i \cap a_j = \emptyset] \rightarrow \exists B\,[B = \{b_1, b_2, \ldots\} \;\&\; b_1 \in a_1 \;\&\; b_2 \in a_2 \;\&\; \ldots).$$

Axioma infinitului: Există cel puţin o mulţime A astfel că:

a) $\emptyset \in A$,
b) Dacă $x \in A$ atunci $\{x\} \in A$.

Împreună cu axioma mulţimii potenţiale, axioma infinitului determină şirul de mulţimi $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ... prin

care se poate constitui şirul numerelor naturale. Aşa cum am menţionat şi în *Introducere*, axioma infinitului şi axioma alegerii nu pot fi deduse din concepte şi relaţii pur logice, ceea ce înseamnă că o bună parte a matematicii tradiţionale nu poate fi încorporată programului logicist de fundamentare a matematicii (axiomele respective s-au dovedit indispensabile aritmeticii, analizei, ca şi unor aplicaţii ale matematicii, cum ar fi mecanica teoretică, de exemplu).

Legat de ideea de mulţime trebuie discutată şi ideea de *clasă*, deşi, cel mai adesea, cele două concepte sunt luate ca echivalente.

Se obişnuieşte uneori ca mulţimea să fie considerată termen prim (colecţie sau agregat de obiecte distincte între ele), iar clasa termen derivat. Este clasă, atunci, acea mulţime de elemente ce satisface o funcţie propoziţională. Pentru că încă nu am discutat conceptul de funcţie propoziţională, putem spune, mai simplu, că este clasă extensiunea asociată unui anumit concept.

În alte contexte, clasa poate primi accepţiuni mult mai speciale. La Bernays, de exemplu, sunt clase doar mulţimile care nu mai pot fi elementele altor mulţimi.

Pentru simplificarea expunerii, în consideraţiile ce urmează nu voi face nici o deosebire între mulţime şi clasă, indiferent care din termeni este folosit.

O clasă (mulţime) poate fi dată extensional (prin enumerarea elementelor sale) sau intensional (prin indicarea proprietăţii pe care o verifică elementele respective): $A = \{a_1, a_2... \}$ sau $A = \{x: F(x)\}$. Exprimarea intensională este preferabilă uneori, iar când avem de-a face cu mulţimi foarte mari de elente, chiar infinite, ea este singura posibilă. Legătura dintre cele două forme de exprimare este dată de echivalenţa: $\forall x\ [x \in A \equiv F(x)]$.

A nu se confunda logica claselor cu teoria mulţimilor. Prima este o teorie logică, ea are ca obiect validitatea anumitor scheme de raţionare cu propoziţii în care intervin clase; a doua este o teorie matematică al cărui principal obiect îl constituie definirea, eventual, constituirea de alte obiecte (obiecte strict matematice). Deşi cele două se intersectează în zone destul de largi, ele nu se confundă.

Aplicarea în logică a conceptelor teoriei mulţimilor nu trebuie înţeleasă în sensul reducerii logicii la un simplu caz particular al ei. De altfel, cea mai mare parte a teoriei mulţimilor s-a dovedit a nu fi necesară logicii, ceea ce se aplică aici sunt doar câteva dintre conceptele ei de bază. În principal, ele vizează probleme referitoare la calcule, modele, domenii de interpretare, mulţimi de formule, clase de echivalenţă ş. a. Calculul matriceal, de exemplu, este asociat mulţimii $\{v, f\}$, iar calculul formelor normale este asociat mulţimii formulelor dintr-un limbaj simbolic. În primul caz avem de a face cu o mulţime la nivelul semanticii, în al doilea, la nivelul sintacticii.

Atât în semantică cât şi în sintaxă exemplele pot continua. Pentru logica predicatelor, domeniul de interpretare este o mulţime în plan semantic, pe când alfabetul este o mulţime în sintaxă. Chiar şi calcule mai speciale, cum ar fi calculul axiomatic, de exemplu, sau calculul natural, sunt definite relativ la anumite mulţimi (mulţimi de formule de un anumit tip şi mulţimi de reguli de deducţie).

În legătură cu această problemă trebuie arătat că şi unele sisteme logice cum este sistemul logicii propoziţiilor pot fi considerate ca mulţimi de formule pe care se definesc anumite operaţii şi relaţii logice. Întrucât proprietăţile formale ale acestor operaţii şi relaţii verifică axiomele unor cunoscute structuri matematice, sistemele în cauză pot fi studiate în termenii respectivelor structuri (aplicaţia conceptului de mulţime devine, aşadar, condiţia aplicării conceptului de structură).

În continuare voi exemplifica câteva concepte mai importante ale teoriei mulţimilor care pot fi întâlnite în logică.

1) ***Mulţimea potenţială***. Fie A o mulţime oarecare. Mulţimea potenţială, notată $P(A)$, se defineşte ca mulţime a submulţimilor lui A: $P(A) = \{X: X \subset A\}$. Exemplificăm acest concept pe mulţimea valorilor logice $V = \{v, f\}$ şi obţinem: $P(V) = \{\emptyset, \{v\}, \{f\}, \{v, f\}\}$.

2) ***Reuniunea şi intersecţia mulţimilor***. Dacă A şi B sunt mulţimi, reuniunea respectiv intersecţia mulţimilor, notate cu $\cup$, $\cap$, se definesc astfel:

$$A \cup B =_{df} \{x: x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B =_{df} \{x: x \in A \,\&\, x \in B\}.$$

Cele două operaţii se pot generaliza când se folosesc notaţiile: $\cup_i A_i$, respectiv, $\cap_i A_i$. De asemenea, cu ajutorul celor două operaţii se pot da unele reformulări ale principiului terţului exclus şi ale principiului noncontradicţiei:

$$A \cup C(A) = U,$$
$$A \cap C(A) = \emptyset,$$

unde $C(A)$ este complementara mulţimii A (= mulţimea acelor elemente x care nu aparţin mulţimii A).

Operaţiile mulţimiste $\cap$, $\cup$, $-$ (sau C) şi operaţiile logice &, $\vee$, $\sim$ au proprietăţi formale identice, ele determină algebrele booleene $\{M, \cup, \cap, -\}$, respectiv, $\{P, \vee, \&, \sim\}$. Aceasta a şi făcut ca în locul operaţiilor logice &, $\vee$ să se folosească simbolurile $\cup$, $\cap$. Notez ca o curiozitate faptul că L. Felix (24) defineşte operaţiile mulţimiste $\cup$, $\cap$ după modelul funcţiilor de adevăr relativ la relaţia de apartenenţă ($\in$) şi neapartenenţă ($\notin$):

A, B	$A \cap B$
$\in \in$	$\in$
$\in \notin$	$\notin$
$\in \notin$	$\notin$
$\notin \notin$	$\notin$

A, B	$A \cup B$
$\in \in$	$\in$
$\in \notin$	$\in$
$\in \notin$	$\in$
$\notin \notin$	$\notin$

Să luăm cazul mulţimii $A \cap B$. Prima linie din tabel indică faptul că apartenenţa la mulţimea $A \cap B$ este în funcţie de apartenenţa la mulţimea A şi la mulţimea B.

Este interesant că semnele $\cap$, $\cup$ au pătruns şi în logica predicatelor ca simboluri pentru cuantori: $\cup x\, F(x)$ şi $\cap x\, F(x)$. Aceasta se datorează analogiilor dintre disjuncţie (simbolizată cu $\cup$) şi cuantorul existenţial, respectiv, conjuncţia (simbolizată cu $\cap$) şi cuantorul universal.

3) ***Produs cartezian***. Fie, din nou, două mulţimi nevide A, B. Produsul cartezian $A \times B$ se defineşte prin:

$$A \times B =_{df} \{<a, b>: a \in A \ \& \ b \in B\}.$$

Definiţia poate fi reformulată pentru cazul general:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n =_{df} \{<a_1, a_2, ..., a_n>: a_1 \in A_1 \ \& \ a_2 \in A_2 \ \& ... \ \& \ a_n \in A_n\}.$$

Elementele produsului cartezian $<a_1, a_2, ..., a_n>$ se numesc *n-tuple*. Pentru cazul particular în care $n = 2$ se foloseşte denumirea de *cuplu* sau *pereche ordonată* în care ordinea elementelor este strictă.

O notaţie curioasă a cuplului sau perechii ordonate apare la K. Kuratovski: $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Pe lângă axiomele perechii, această notaţie este importantă şi pentru faptul că redă relaţia

de ordine din perechea ordonată $< a, b >$ prin relația de ordine strictă $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Relativ la produsele carteziene pot fi invocate următoarele cazuri mai importante de mulțimi:

a) mulțimile perechi (relativ la produsul A × B),

b) mulțimile puteri ($A^n = A \times A \times ... \times A$, de *n* ori),

c) produsele infinite ($\Pi A = A \times A \times ...$).

În logică putem forma produsul cartezian $\{v, f\} \times \{v, f\} = \{vv, vf, fv, ff\}$ ale cărui elemente intervin în definiția matricială a funcțiilor de adevăr.

4) ***Graf***. În literatura de specialitate circulă astăzi două sensuri ale grafului; un sens slab, de submulțime a produsului cartezian, și un sens tare, de asociere între element și pereche, respectiv între muchie și vârfuri. Primul sens este presupus de al doilea care este, desigur, mult mai special.

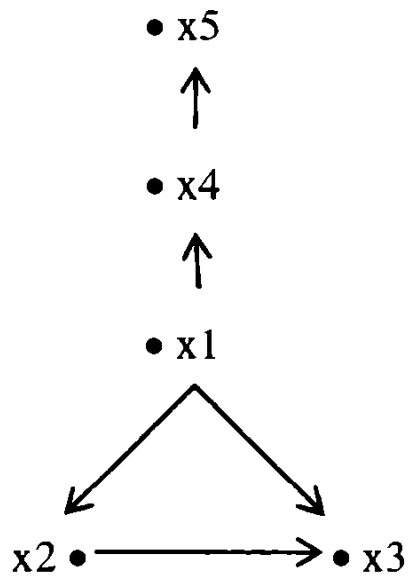
O tratare a funcțiilor de adevăr din perspectiva grafului este dată de M. Târnoveanu în cartea sa *Elemente de logică matematică* (1964). Graful este definit aici ca un sistem ordonat $G = \{\{a_i\}, \{\alpha_j\}\}$ astfel că elementului $a_i \in \{a_i\}$ îi corespunde perechea $\alpha_{j1\,j2} \in \{\alpha_{ij}\}$ unde i = 1, 2, ... *n* și j = 1, 2, ..., *m*.

Elementele a_i se mai numesc și *vârfurile* sau *nodurile* grafului, iar perechile α ij *muchiile* sale.

Un graf *G* poate avea ca vârfuri mulțimea $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ iar ca muchii mulțimea de perechi $x' = \{ < x_1, x_2 >, < x_1, x_3 >, < x_2, x_3 >, < x_1, x_4 >, < x_4, x_5 >\}$.

Dacă într-un graf nu intervin perechi ordonate, el este neorientat, iar dacă intervin astfel de perechi, ca în exemplul de mai sus, atunci el este un graf orientat. Un triunghi, de exemplu, poate fi luat ca un graf neorientat în care vârfurile triunghiului sunt vârfurile grafului, iar laturile triunghiului sunt muchiile sale.

Un graf orientat, cum este cel exemplificat mai sus, se poate reprezenta în plan astfel:



Atât în graful orientat cât şi în cel neorientat legătura unui vârf cu el însuşi se numeşte *buclă*. Orice funcţie de adevăr poate fi definită atunci printr-un graf orientat. Implicaţiei, de exemplu, îi corespunde graful:

în care *v*, *f* sunt vârfuri, iar (*ff*), (*fv*), (*vv*) sunt muchii. Sub formă de mulţime, aceasta s-ar putea exprima prin:

$G_{\rightarrow} = \{ <(vv), v>, <(fv)>, v>, <(ff), v> \}$.

O interesantă exemplificare a grafului (în sensul definit mai sus) este pătratul logic. Aici raporturile logice de *subalternare*, *contradicţie*, *contrarietate* şi *subcontrarietate* sunt vârfuri, iar perechile de propoziţii sunt muchii. Subalternării, de exemplu, îi corespunde perechea ordonată <A,I> , respectiv, <E,O>.

Spre deosebire de alte concepte mulţimiste care pot avea cel mult o exemplificare logică, produsul cartezian şi graful se dovedesc mult mai utile, în unele situaţii chiar indispensabile.

5) ***Echivalenţa mulţimilor şi clasele de echivalenţă***. Două mulţimi A şi B se numesc *echivalente* (*echipolente*, *echipotente* sau *egale*), dacă între elementele lor se poate stabili o relaţie de corespondenţă biunivocă (a nu se confunda echivalenţa sau egalitatea mulţimilor cu identitatea lor, mai ales că ambele relaţii se notează uneori cu „=").

Totalitatea mulţimilor care se află în relaţie de echivalenţă formează o *clasă de echivalenţă*. De exemplu, clasa de echivalenţă asociată mulţimii A se notează cu $//A//$ şi se defineşte prin $//A// = \{X : X \sim A\}$ unde „~" este semnul pentru echivalenţă.

Din punct de vedere logic, clasele de echivalenţă sunt importante pentru un tip special de definiţie, şi anume definiţia prin abstracţie. O astfel de definiţie este definiţia numărului cardinal din matematică: numărul cardinal al unei mulţimi oarecare A este mulţimea tuturor mulţimilor echivalente cu mulţimea A.

Se consideră numere naturale numerele cardinale cărora li se poate aplica inducţia matematică.

Definiţia semnului este, de asemenea, o definiţie prin abstracţie (semnul este totalitatea inscripţiilor echivalente grafic); la fel, definiţia judecăţii (judecata exprimată de o propoziţie P este clasa tuturor propoziţiilor logic echivalente cu P).

6) ***Mulţimi şi concepte fuzzy***. Fie M o mulţime oarecare nevidă. În mod obişnuit, o mulţime se subordonează principiului terţului exclus, dat fiind că despre orice lucru se poate spune precis dacă aparţine sau nu mulţimii: $\forall x\,(x \in M \vee x \notin M)$.

Aşa-numitele *mulţimi fuzzy* nu satisfac această condiţie, altfel spus, nu pentru oricare element este adevărată disjuncţia „$x \in M \vee x \notin M$".

Relativ la mulţimile fuzzy, Gh. Enescu distinge între un *nucleu* şi o *margine*. Nucleul se compune din elementele certe ale mulţimii, iar cele pentru care apartenenţa este îndoielnică formează marginea.

Conceptele asociate mulţimilor fuzzy se numesc, la rândul lor, *concepte fuzzy*. Ele fac obiectul unei discipline logice speciale cunoscută astăzi sub numele de *logica fuzzy* (elaborarea sistematică a teoriei mulţimilor fuzzy, ca şi a logicii fuzzy, a fost realizată de L. A. Zadeh, 1972).

Un exemplu clasic de concept fuzzy este conceptul de „grămadă", legat de cunoscutul paradox megaric al grămezii.

Rămâne deschisă problema dacă şi în ce măsură unele dintre conceptele de bază ale logicii cum este conceptul de adevăr, de exemplu, pot fi tratate în manieră fuzzy. Principalul impediment îl constituie faptul că nuanţările adevărului, deşi merg destul de departe, se constituie într-o mulţime discretă pe câtă vreme logica fuzzy este o logică a conţinutului. Unele probleme apar şi din direcţia simbolismului care nu este folosit peste tot la fel. Simbolismul matematic obişnuit nu este soluţia cea mai fericită, deşi, la ora actuală el pare a domina cercetările din logica fuzzy.

2. FUNCŢIA – DE LA MATEMATICĂ LA LOGICĂ

Există în momentul de faţă o teorie a funcţiilor aşa cum există şi o teorie a mulţimilor, independentă de natura concretă a entităţilor la care ele se aplică. De altfel, conceptul de funcţie este astăzi atât de general, încât unii autori evită să-l mai lege de un domeniu anume. Ea este legată de cea mai abstractă relaţie, şi anume relaţia de corespondenţă. Aceasta poate merge de la dependenţe materiale la simple asocieri abstracte de elemente.

Este discutabil dacă conceptul de funcţie presupune neapărat conceptul de mulţime sau dacă nu cumva acest concept este prim. Cel puţin în abordările curente, definiţia funcţiei nu se poate dispensa de orice idee de extensiune (a se vedea în acest sens şi ideea de „totalitate", la Goldblatt). În orice caz, raportul mulţime-funcţie aminteşte de tradiţionala dispută extensiune-comprehensiune.

Nu-mi propun să fac o descriere detaliată a teoriei funcţiilor, ci doar să reamintesc câteva aspecte mai importante.

Se ştie, de pildă, că o funcţie este caracterizată prin trei elemente: *a*) domeniu, *b*) codomeniu şi *c*) regulile de corespondenţă.

Schema funcţiei se redă atunci prin f: $A \to B$ sau $A \to_f B$ care se citeşte: „*f* aplică pe *A* în *B*" (sau „*pe B*"), eventual, „*f* duce de la *A* la *B*".

Cuvintele „în" şi „pe" au rolul de a indica faptul că în definiţia funcţiei intră numai o parte a mulţimii *B* sau mulţimea în întregul ei („în" nu îl exclude pe „pe").

Fie mulţimile $A = \{a, b, c, d\}$ şi $B = \{e, f\}$. Convenim ca funcţia *f* definită pe *A* cu valori în *B* să fie definită de următoarele corespondenţe:

$$f(a) = e,$$
$$f(b) = e,$$
$$f(c) = f,$$
$$f(d) = f.$$

Aceste identităţi exprimă regulile de corespondenţă între elementele celor două mulţimi relativ la funcţia *f*. Este interesant de notat că relaţia de corespondenţă la nivelul funcţiei este redată prin relaţia de identitate la nivelul relaţiei funcţionale. Practic, îşi corespund acele elemente care transformă identitatea $y = f(x)$ ($x \in A$ şi $f(x) \in B$) într-o propoziţie adevărată.

Singure, regulile de corespondenţă nu sunt în măsură să particularizeze o funcţie, altfel spus, să determine apartenenţa funcţiei la domeniul unei anumite ştiinţe, ceea ce face ca funcţia să iasă din cadrul ei abstract şi să primească o determinare concretă este tocmai precizarea elementelor la care ea se aplică (domeniul, respectiv, codomeniul funcţiei).

Având în vedere că în logică pot fi întâlnite asemenea mulţimi de elemente, cum s-a văzut, este justificat să vorbim de funcţiile logice ca de un tip special de funcţie.

Definiţie. O funcţie f: $M^n \rightarrow V$, $n \geq 1$, unde $V = \{v, f\}$ iar M este o mulţime oarecare nevidă (se precizează de fiecare dată care anume) se numeşte *funcţie logică.*

Cazurile particulare $M = V$, $M \neq V$ corespund celor două specii de funcţii logice, respectiv, *funcţiilor de adevăr* şi *funcţiilor propoziţionale.*

Trebuie să deosebim când vorbim despre conceptul de funcţie în logică între funcţiile propriu-zis logice (cele definite mai sus) şi toate celelalte funcţii care pot să mai apară în logică, inclusiv funcţiile matematice. Acestea din urmă sunt sporadice şi se folosesc mai mult în chestiuni de prezentare, neesenţiale în principiu. De exemplu, formula de calculare a funcţiilor de adevăr din logica propoziţiilor se exprimă printr-o funcţie matematică:

$$N = 2^{m^n},$$

unde m reprezintă numărul variabilelor, iar n numărul valorilor logice.

Un exemplu şi mai interesant îl oferă A. Church relativ la semantica lui Frege. Relaţia dintre semnificaţia numelui N şi sensul acestuia este redată de A. Church în formă de funcţie:

$$\text{Semnificaţie}_N = f(\text{sensul}_N),$$

adică „semnificaţia numelui *N* este în funcţie de sensul lui *N*". De asemenea, între mulţimea propoziţiilor *P* şi mulţimea valorilor logice $\{v, f\}$ se poate defini funcţia f: $P \rightarrow \{v, f\}$ astfel că, dacă $p \in P$, atunci $f(p) = v$ sau $f(p) = f$. Această funcţie este cunoscută în logică sub numele de *evaluare*.

La fel *interpretarea*, concept logic de cea mai mare importanţă, poate fi dată sub forma unei funcţii ce stabileşte corespondenţele între simbolurile unui limbaj *L* şi domeniul în care acesta urmează a fi interpretat.

Toate aceste funcţii, la care se mai pot adăuga încă multe altele, nu sunt funcţii strict logice, ci doar exemplificări şi aplicaţii ale conceptului general de funcţie în logică, exemplificări şi aplicaţii de care, la nevoie, ne putem dispensa. Funcţiile propriu-zis logice sunt funcţiile pe care le-am definit mai sus şi pe care vreau să le discut pe scurt în cele ce urmează.

1) ***Funcţii de adevăr***. Să luăm pentru exemplificare cazul unei funcţii de adevăr, să zicem implicaţia, definită prin matricea:

P,Q	P → Q
v v	v
v f	f
f v	v
f f	v

Care este drumul de la funcţia „P → Q" la propoziţia implicativă formulată prin „dacă... atunci..."?

În primul rând, trebuie spus că această funcţie postulează anumite corespondenţe între elementele mulţimii $\{vv, vf, fv, ff\}$ şi elementele mulţimii $\{v, f\}$:

$v\,v$ -------- v,
$v\,f$ -------- f,

$$f\,v \text{ ---------- } v,$$
$$f\,f \text{ ---------- } v.$$

Aceste corespondenţe nu sunt arbitrare, ele provin din aplicarea unor reguli de adevăr specifice propoziţiei implicative, cum ar fi: *a*) dacă antecedentul este adevărat şi consecventul adevărat, implicaţia este adevărată ş.a.m.d.

Regulile în cauză au fost cunoscute atât de antici cât şi de medievali, însă redarea lor ca reguli de corespondenţă într-o funcţie a fost realizată de logica modernă.

În formă simbolică, aceste reguli pot fi reformulate după cum urmează:

$$(v \rightarrow v) = v,$$
$$(v \rightarrow f) = f,$$
$$(f \rightarrow v) = v,$$
$$(f \rightarrow f) = v.$$

Din analiza acestui exemplu ne putem da seama că funcţiile de adevăr stabilesc anumite „distribuţii" ale valorilor v, f în structura propoziţiilor compuse, astfel că, plecând de la valoarea propoziţiilor componente, putem determina într-un mod univoc valoarea propoziţiei compuse.

Fiecare propoziţie compusă cu ajutorul cuvintelor de legătură „non", „şi", „sau", „implică", „echivalent" ş.a. îşi asociază, aşadar, o anumită funcţie de adevăr.

În continuare voi enumera câteva aspecte din perspectiva cărora putem aprecia valoarea pe care o prezintă pentru logică conceptul de funcţie de adevăr. Aceste funcţii permit:

a) introducerea conceptelor de *tautologie*, *contradicţie* şi *realizabilitate* care sunt de bază în logică. O funcţie de adevăr $f(p, q, ...)$ este tautologie dacă ia valoarea v pentru orice valoare posibilă a argumentelor sale. Este contradicţie dacă ia

numai valoarea *f* şi este realizabilă dacă pentru unele valori ale argumentelor sale ia valoarea *v*, iar pentru altele valoarea *f*.

În loc de „tautologie" se mai foloseşte astăzi termenul de „expresie identic adevărată" sau de „lege logică". Ca orice ştiinţă, logica este interesată de descoperirea de „legi logice", în speţă de „legi de raţionare". Ele guvernează în diferite moduri validitatea schemelor noastre de inferenţă.

b) Funcţiile de adevăr permit studierea într-o formă exactă, matematică, a principalelor proprietăţi formale ale operatorilor logici. Nici în discuţiile anticilor despre propoziţiile condiţionale şi nici în reluările medievalilor, această problemă nu a putut fi dusă până la capăt. Numai logica simbolică a putut da o soluţie satisfăcătoare prin aplicarea conceptului de funcţie.

c) Definiţiile matriciale ale funcţiilor de adevăr permit exprimarea anumitor reguli de deducţie în raport cu expresiile corespunzătoare lor. Pentru conjuncţie, de exemplu, aceste reguli arată astfel:

$$\frac{P \bullet Q}{P} \qquad \frac{P \bullet Q}{Q} \qquad \frac{P, Q}{P \bullet Q}$$

Aceasta înseamnă:

Din $(P \bullet Q) = v$ se deduce $P = v$,
Din $(P \bullet Q) = v$ se deduce $Q = v$,
Din $P = Q = v$ se deduce $(P \bullet Q) = v$.

d) După modelul funcţiilor de adevăr din logica bivalentă se pot defini astfel de funcţii şi în sistemele polivalente sau în sistemele modale. J. Lukasiewicz, de exemplu, construieşte sistemul său tetravalent plecând de la definiţiile operatoriilor în logica bivalentă. În locul valorilor *v*, *f* el ia ca valori ale variabilelor propoziţionale cele patru combinaţii de valori din matricile bivalente, respectiv: *vv*, *vf*, *fv*, *ff*. Implicaţia „*vf* →

ff', să zicem, se calculează după regulile obişnuite „$v \to f$' şi „$f \to f$' ceea ce dă *fv*. În felul acesta, Lukasiewicz construieşte un nou concept de implicaţie, definit prin matricea:

$\Rightarrow$	v v	v f	f v	f f
v v	v v	v f	f v	f f
v f	v v	v v	f v	f v
f v	v v	v f	v v	v f
f f	v v	v v	v v	v v

Deşi implicaţia „$\Rightarrow$" se defineşte prin implicaţia bivalentă „$\to$", proprietăţile ei sunt în multe privinţe diferite de proprietăţile acesteia.

f) Funcţiile de adevăr au permis rezolvarea unor importante probleme ale logicii tradiţionale, însă nu trebuie uitat că cele mai multe din problemele la care se aplică ele ţin exclusiv de logica simbolică (problema deciziei, dualităţii, minimizarea expresiilor, transcrierea operatorilor dintr-o bază în alta şi multe altele).

Tabloul general al funcţiilor de adevăr nu se poate considera încheiat fără enumerarea câtorva particularităţi prin care aceste funcţii îşi dovedesc caracterul lor limitat în logică. Am în vedere două categorii mari de limite.

În primul rând, trebuie spus că atât în logica bivalentă, cât şi în logica polivalentă, apar funcţii ce nu pot fi interpretate corespunzător, cum este cazul funcţiei de mai jos care nu corespunde nici unei propoziţii compuse. Este inutil să mai insist asupra faptului că aceste funcţii au doar aplicaţii abstracte (pur calculatorii) fără o interpretare corespunzătoare în plan logic.

P, Q	φ(P, Q)
v v	v
v f	f
f v	v
f f	f

Dar chiar şi la funcţiile interpretabile, regulile de adevăr pot conduce la situaţii bizare. În cazul conjuncţiei, de exemplu, regula $(v \bullet v) = v$ justifică propoziţia „ 2 + 2 = 4 şi Bucureştiul este capitala României".

Este această propoziţie adevărată?

Strict vorbind, propoziţia nu contravine regulii de adevăr, totuşi, în vorbirea curentă rareori se întâmplă să asertăm asemenea propoziţii.

Lucrurile se complică şi mai mult când trecem la propoziţiile implicative. În general, se consideră paradoxală o propoziţie de forma „dacă 2 + 2 = 5, atunci toate mamiferele sunt vertebrate". Acest aşa-zis paradox poate fi apreciat din două puncte de vedere. Întâi, pentru că între propoziţia „2 + 2 = 5" şi propoziţia „toate mamiferele sunt vertebrate" nu există nici un raport implicativ, ele sunt independente din punct de vedere al conţinutului (sensului). Apoi, pentru că se consideră adevărată implicaţia în care antecedentul este fals şi consecventul adevărat. Desigur, al doilea sens este mai special şi reclamă o discuţie mai amplă asupra a ceea ce se cheamă astăzi „paradoxele implicaţiei materiale". Primul, însă, este destul de comun şi caracterizează, practic, toate funcţiile de adevăr. Excepţie face negaţia pentru că ea se aplică unei singure propoziţii şi deci nu există riscul asocierii unor conţinuturi diferite.

În cartea sa, *Teoria sistemelor logice* (20; 343), Gh. Enescu încearcă să rezolve problema introducând o nouă variantă de adevăr pentru aceste construcţii logice – *veridicul*. Rămâne de văzut în ce măsură acest concept poate fi asimilat unui calcul logic şi dacă logica polivalentă poate „absorbi" această problemă a logicii bivalente. Ce pot spune deocamdată este că principala limită a funcţiilor de adevăr se datorează faptului că nu întotdeauna logica sensurilor este în consonanţă cu logica semnificaţiilor.

2) ***Funcţii propoziţionale***. În *Principia Mathematica* funcţia propoziţională este definită drept „o expresie Φx care conţine o variabilă x astfel că ea devine o propoziţie când pentru x este dată o semnificaţie determinată" (72; 11).

Se adoptă, relativ la funcţia propoziţională, următorul sistem de notaţii:

Φx - funcţia propoziţională (expresiile Φx, Φy, Φz,... semnifică una şi aceeaşi funcţie).

Φx,Φy,... valorile ambigue ale funcţiei,

Φa, Φb,... valorile determinate ale ei.

Conceptul de funcţie propoziţională introdus în *PM* nu este tocmai clar dat fiindcă una şi aceeaşi funcţie este desemnată prin mai multe expresii. Aceasta poate duce la complicaţii, mai ales în raport cu regulile de calcul. Din acest punct de vedere, cel puţin, definiţia lui Frege este mult mai clară, însă, din păcate, ea nu este susţinută şi de un simbolism corespunzător.

Să considerăm pentru exemplificare funcţia „x este par", sau, în exprimarea uzuală, „Par(x)". Pentru valorile 1, 2, 3,... ale variabilei, funcţia se transformă succesiv în propoziţiile „1 este par", „2 este par", „3 este par" etc. Am putea spune că o asemenea funcţie realizează corespondenţa dintre mulţimea numerelor naturale N şi o mulţime de propoziţii P.

Mulţimea acelor elemente pentru care funcţia propoţională devine adevărată sau falsă reprezintă *domeniul* acelei funcţii. Întrucât nu contează propoziţiile ca atare, ci doar valoarea lor logică, vom spune că funcţia în cauză realizează corespondenţa dintre mulţimea numerelor naturale N şi mulţimea valorilor logice $\{v, f\}$.

Avem, aşadar, o funcţie de tip $N \rightarrow \{v, f\}$ care nu este altceva decât un caz particular faţă de definiţia conceptului general de funcţie logică.

Următorul tabel pune în evidenţă elementele caracteristice ale funcţiei Par(x) precum şi corespondenţele pe care le stabileşte ea între cele două mulţimi menţionate mai sus.

x	1	2	3 ...	Domeniul
Par (x)	Par ( )			Funcţia
Par (n)	Par (1),	Par (2),	Par (3) ...	Propoziţia
/Par (n)/	f,	v,	f,	Codomeniul

În acest tabel Par ( ) este funcţia ca atare, iar Par (x) este *numele* funcţiei, ca să păstrez terminologia lui Frege. „Par (n)" este valoarea nedeterminată a funcţiei în timp ce „Par (1)", „Par (2)" etc. sunt valorile ei determinate. Cu „/Par(n)/" am notat valoarea logică a propoziţiei „n este par".

Corespondenţele realizate prin această funcţie ar putea fi date sub formă de graf: $\{< 1, f >, < 2, v >, < 3, f >, ...\}$.

Expresiile $x \geq y$, $2x + 3 = 6$, $x^2 - 2 = 18$ etc. sunt exemple de funcţii propoziţionale în matematică întrucât ele devin propoziţii adevărate (sau false) pentru diferitele valori ale variabilei x.

Foarte multe concepte şi relaţii matematice pot fi tratate ca funcţii propoziţionale, ceea ce justifică interesul pe care matematica îl manifestă pentru acest concept logic (există în momentul de faţă procedee foarte elaborate ale matematicii

care permit determinarea acelor valori ale variabilelor pentru care funcţia devine propoziţie adevărată).

Nu acelaşi lucru se poate spune despre logică şi aceasta constituie una dintre principalele deosebiri dintre cele două ştiinţe relativ la conceptul de funcţie.

Din punct de vedere logic, este suficient să se ştie că există asemenea valori pentru care funcţia devine propoziţie adevărată sau care *satisfac* funcţia. Dacă o funcţie $F(x)$ este satisfăcută de orice valoare a variabilei sale libere într-un domeniu D, spunem că ea este *adevărată* (sau *validă*) *în D*. Dacă, în schimb, funcţia este satisfăcută pentru orice valoare, în orice domeniu, atunci ea este *universal adevărată* (*validă*). În fine, dacă nu este adevărată pentru nici un sistem de valori, ea este *contradicţie*.

Cu ajutorul cuantorilor, aceste idei pot fi reformulate după cum urmează:

a) $\exists x\ F(x)$, adică „există cel puţin un element într-un domeniu anume pentru care funcţia este adevărată.

b) $\forall x\ F(x)$, „pentru orice element x al domeniului este adevărat $F(x)$".

c) $\sim(\exists x)\ F(x)$, sau $\forall x \sim F(x)$ – „nu există nici un element x astfel că $F(x)$ să fie adevărată"; sau „oricare ar fi x, $F(x)$ este falsă".

Chiar şi din aceste sumare consideraţii ne putem da seama că ceea ce au în comun funcţiile propoziţionale cu cele strict matematice este doar ideea de corespondenţă, sub toate celelalte aspecte ele sunt diferite. Abordarea logică este mult mai generală faţă de cea matematică, după cum se poate uşor observa. Specificitatea funcţiei logice este dată apoi de natura entităţilor la care ele se aplică şi de tipul operaţiilor cu care sunt compatibile. În funcţiile matematice cele mai uzitate avem de-a face cu operaţii care duc de la funcţie la număr,

față de cele logice în care operațiile duc la propoziții. Or, deosebirea este esențială. Este drept că în *Principia Matematica* tipul fundamental de funcție este funcția propozițională care subsumează, într-un fel, și funcția matematică. Funcții cum ar fi *sin x*, x^2, log *x* etc. sunt considerate aici *funcții descriptive* aceste funcții conțin descripții de genul: „acel *x* care este cutare și cutare" (acel număr x care este pătratul lui y). Acest concept de funcție descriptivă nu s-a impus în practica matematică curentă și chiar în literatura logică el este destul de sporadic.

O unificare (formală) a funcțiilor logice cu cele matematice realizează teoria funcțiilor recursive (Gödel, Kleene ș.a.). Numai că această unificare s-a lovit de caracterul refractar la abordarea recursivă a conceptului logic funcțional „*x* este demonstrabil", concept angajat de marea teoremă a lui Gödel. Este doar unul dintre argumentele tezei potrivit căreia, între „modelul logic" și „modelul mulțimist-matematic", chiar înrudirea structurală nu merge foarte departe.

3) ***Conceptul de funcție în logica combinatorică și în calculul lambda-conversiunii.***

Începând cu primele decenii ale acestui secol, o serie de autori au atras atenția asupra unor ambiguități legate de utilizarea termenului „funcție". Notația uzată "$f(x)$", se arată în primul volum din *Combinatory logic* (16; 81), nu distinge suficient de clar între funcția însăși și valoarea funcției pentru o valoare nedeterminată a argumentului. Acest neajuns devine stânjenitor mai ales în teoriile care folosesc operații funcționale, adică funcții ce admit alte funcții ca argumente.

Soluția va veni din partea calculului lambda conversiunii elaborat de A. Church începând cu anul 1932. Varianta definitivă a acestui calcul este dată de A. Church în lucrarea sa *The calculi of lambda - conversion* (Princeton, 1941).

Noutatea soluţiei propusă de Church constă în sistemul de notaţii imaginat de el, sistem care pune în evidenţă relaţia de corespondenţă dintre valoarea nedeterminată a argumentului x şi valoarea funcţiei pentru acest argument. Altfel spus, dacă M este o expresie care îl conţine pe x şi care indică valoarea funcţiei pentru acest argument, funcţia însăşi se va nota cu $\lambda x.$M. De exemplu, $\lambda x.x^2$ este funcţia pătrat, $\lambda x\ sin\ x$ este funcţia *sinus*, şi aşa mai departe.

O funcţie de mai multe argumente se va nota cu $\lambda x_1, ..., x_n.$M. Expresia $\lambda x.$M se mai numeşte şi *abstracţie funcţională*.

Fie o funcţie f definită prin $\lambda x.$M. Aplicaţiile de tip fa ale funcţiei f se calculează după regula:

$$fa = [x/a]\ \text{M}\ ,$$

unde $[x/a]$ înseamnă „substituţia lui x cu a în M". Axioma extensionalităţii se reformulează pentru funcţii în felul următor:

$$\text{Dacă}\ fx_1 \ldots x_n = f^*x_1 \ldots x_n, \text{ atunci}\ f = f^* \qquad \text{(Ext)}$$

Cu ajutorul abstracţiei funcţionale $\lambda x.$M se definesc mai departe conceptele de *combinator* şi *regulă de reducţie*.

***Definiţia* 1**. O funcţie U se numeşte combinator dacă $U = \lambda x_1 \ldots x_n.$M şi M nu conţine alte variabile decât cele care apar în prefixul formulei, respectiv $x_1, x_2, ..., x_n$.

***Definiţia* 2**. Dacă U definită prin $\lambda x_1 \ldots x_n.$M este un combinator, atunci $Ux_1 \ldots x_n$ = M este regula de reducţie asociată lui.

Iată şi câţiva dintre combinatorii mai importanţi studiaţi de logica combinatorică împreună cu regulile de reducţie asociate lor:

a) *Identificatorul elementelor*: $\text{I} = \lambda x.x$, şi $\text{I}x = x$.

b) *Compozitorul*: $\text{B} = \lambda xyz.x(yz)$, şi $\text{B}xyz = x(yz)$.

c) *Eliminatorul*: $K = \lambda xy.x$, şi $Kxy = x$.
d) *Combinatorul formalizării*: $S = \lambda xyz.xz(yz)$, şi $Sxzy = xz(yz)$.

Combinatori mai speciali cum ar fi C, W, Φ, Ψ ş.a. se definesc în aceeaşi manieră. Unii dintre ei au proprietatea că îi pot transcrie pe toţi ceilalţi. De exemplu, combinatorul B se poate transcrie prin (S) şi (K):

$$\begin{aligned} Bxyz &= x(yz) && \text{(Def.)} \\ &= Kxz(yz) && \text{(K)} \\ &= S(Kx)yz && \text{(S)} \\ &= KSx(Kx)yz && \text{(K)} \\ &= S(KS)Kxyz && \text{(S)} \end{aligned}$$

$$B = S(KS)K \qquad \text{(Ext.)}$$

În aplicaţiile matematice uzuale, aceşti combinatori conduc la expresii în care nu mai apar variabile. Eliminarea variabilelor este aici doar teoretică pentru că, în practica matematică curentă, ele se dovedesc indispensabile. Există multe alte elemente de noutate legate de aplicaţiile acestor combinatori care i-au determinat pe H. B. Curry şi R. Feys, autorii primului volum din *Combinatory logic*, să afirme că logica combinatorică vizează nu doar fundamentele logicii şi matematicii, dar chiar „ultimele lor fundamente".

3. LOGICA MODERNĂ ŞI CONCEPTUL MATEMATIC DE NUMĂR[1]

Cu toate restructurările realizate de matematică, numărul rămâne până în momentul de faţă unul dintre conceptele ei fundamentale. După mulţi autori, el ţine în continuare de spe-

[1] Acest paragraf reproduce cu unele modificări studiul meu cu acelaşi titlu din Analele Univ. Timişoara, vol. I-II, 1989 - 1990.

cificul matematicii, aşa cum conceptul de specie, să zicem, ţine de specificul biologiei. Afirmaţia lui Poincaré potrivit căreia „trebuie să căutăm gândirea matematică acolo unde ea a rămas pură, adică în aritmetică" (56; 7) nu şi-a pierdut cu nimic din actualitate. Este adevărat că dezvoltarea structuralistă a matematicii estompează întrucâtva ideea de număr, însă, parafrazându-l pe Aristotel, am putea spune că dacă numerele nu ar exista, ar fi imposibil pentru orice alt lucru (matematic) să existe.

Într-un studiu din Bourbaki, tradus şi în limba română, se arată că cele mai importante dintre structurile matematice îşi trădează originea prin faptul că păstrează „urme" ale domeniilor din care au fost extrase. Aceste „urme" se referă, între altele, la numere,operaţii cu numere şi la proprietăţile formale ale acestora.

Nici încercările lui Frege şi Russell de a defini numărul prin conceptele de *mulţime* şi *relaţie de corespondenţă* nu schimbă în mod esenţial lucrurile. Aceasta, pentru că definiţia Frege-Russell nu duce la o idee mai generală de număr, cum s-a întâmplat, în alt plan, cu conceptele de funcţie şi structură, ci pur şi simplu o precizează. Evident, ideea că numărul este „totalitate de mulţimi echivalente" schimbă optica asupra conceptului de număr şi de operaţie cu numere forţând într-un fel intuiţia noastră obişnuită. Din caracteristică a mulţimii, numărul devine acum un caz particular de mulţime, ceea ce, trebuie să recunoaştem, contravine utilizărilor lui obişnuite. Spiritul logic a acţionat aici împotriva intuiţiei matematice obişnuite.

Dar dacă numărul rămâne un concept fundamental pentru matematică, se pune în mod firesc întrebarea: care sunt aplicaţiile logice ale acestui concept? Se înscriu aplicaţiile respective pe linia aplicaţiilor din celelalte ştiinţe sau ele prezintă un specific aparte? În sfârşit, pot fi asimilate conceptele de

bază ale logicii unor concepte cantitativiste aşa cum se întâmplă în celelalte ştiinţe?

Iată câteva din întrebările pe care vreau să le discut pe scurt în cele ce urmează.

1) ***Concepte logice şi concepte numerice***. Exceptând anumite categorii şi predicate numerice, cum ar fi: *numărabil-nenumărabil*, *finit-infinit*, *actual-potenţial* ş.a., se poate spune că logica este refractară la aplicaţiile conceptului de număr. Relaţiile logice nu pot fi determinate cantitativ aşa cum se întâmplă în mai toate disciplinele ştiinţifice care aplică conceptul de număr. Nu întâmplător logicianul american E. C. Berkeley (3) afirma că deosebirea fundamentală dintre logică şi matematică este deosebirea dintre calitate şi cantitate.

După Carnap, exprimarea cantităţii şi a raporturilor cantitative se realizează printr-un tip special de concepte care pot fi asociate unor valori numerice. În *Logical foundations of probability* (Chicago, 1962), el împarte conceptele în trei mari categorii: *a*) concepte clasificatorii, *b*) concepte comparative (sau topologice) şi *c*) concepte numerice (sau cantitative).

Cele trei categorii de concepte diferă prin gradul lor de exactitate şi prin rolul diferit pe care îl au în procesul logic al explicării (la Carnap, sarcina explicării constă în „transformarea unui concept mai mult sau mai puţin exact într-unul exact şi, mai mult decât atât, în înlocuirea primului cu al doilea") (11; 3).

Conceptele clasificatorii sunt cele care servesc la clasificarea lucrurilor în două sau mai multe clase disjuncte între ele. Cel mai adesea ele apar în postura de predicat sau subiect logic în propoziţie. Conceptul „metal", de exemplu, împarte universul de discurs în clasa metalelor şi a nemetalelor. La fel, conceptele *om*, *planetă*, *număr* ş.a.

La rândul lor, conceptele comparative se folosesc pentru exprimarea rezultatelor unei comparaţii. Ele implică întot-

deauna o relaţie de ordine tare (de ex. „mai cald ca", „mai uşor decât" ş.a.).

În sfârşit, conceptele numerice (sau cantitative) sunt cele care ajută la caracterizarea lucrurilor sau a unor trăsături ale lor prin asocierea de valori numerice. Concepte cum ar fi: *timp*, *volum*, *forţă*, *temperatură* sunt exemple de concepte numerice. Acest tip de concepte este frecvent întâlnit în ştiinţă tocmai pentru că sunt mai exacte decât toate celelalte. Conceptul numeric *temperatură*, de exemplu, poate fi luat ca explicant pentru conceptele de *cald* sau *rece* întâlnite în vorbirea comună. Acestea din urmă sunt inoperante în ştiinţă datorită gradului mare de imprecizie şi subiectivitate pe care îl implică. Aşa de exemplu, propoziţia de observaţie „*A* este mai cald (sau mai rece) decât *B*", valabilă pentru subiectul *X* în momentul *t*, poate să înceteze a mai fi valabilă într-un moment *t'* ulterior datorită faptului că starea organismului s-a schimbat de la *t* la *t'*. De asemenea, ceea ce este valabil pentru *X* la un moment dat s-ar putea să nu fie valabil şi pentru *Y*. În schimb, dacă *A* are temperatura de n°C, iar *B* de m°C, propoziţia „temperatura lui *A* este mai mare (sau mai mică) decât a lui *B*" nu numai că este exactă, dar este şi intersubiectiv testabilă.

Nu se poate spune că în logică avem de-a face cu asemenea situaţii în ciuda faptului că cele două concepte fundamentale ale logicii, adevărul respectiv falsul, sunt adeseori notate cu simboluri numerice. După cum am mai spus, aceste simboluri vizează cu prioritate limbajul (sistemul de semne) şi nu conceptul ca atare.

În unele sisteme polivalente s-ar putea explica totuşi afirmaţia „*P* este mai adevărat decât *Q*" prin perechea de propoziţii „P are valoarea 2/3" şi „Q are valoarea 1/3" unde 2/3 şi 1/3 sunt, aşa cum am spus, simboluri numerice menite să introducă anumite nuanţe între adevăr şi fals.

Există totuşi o mare deosebire faţă de situaţia exemplificată mai sus, după Carnap, datorită faptului că aici apar numere abstracte (luate ca valori logice) pe câtă vreme în celelalte ştiinţe se lucrează cu numere concrete (36°C, 25 g, 15 cm etc.). Or, adevărul, respectiv falsul, nu se exprimă printr-un etalon, aşa cum lungimea se exprimă în metri, masa în grame, forţa în newtoni şi aşa mai departe. Simbolurile 1, 2/3, 1/3, 0 nu au o semnificaţie logică proprie, ci numai printr-o interpretare corespunzătoare, când devin simboluri pentru un anumit conţinut logic. Impresia că cele două concepte logice – adevărul şi falsul – ar fi concepte numerice (sau cantitative), născută din ideea simbolizării lor prin cifre, reprezintă una din principalele neînţelegeri ale actualelor aplicaţii cu caracter aritmetic din logică.

Există totuşi anumite situaţii în care evaluările cantitativiste pot prezenta un interes chiar şi în logică. Pentru exemplificare voi lua un caz la întâmplare. În cartea sa *Aristotele's syllogistic from the standpoint of modern formal logic* (Oxford, 1957), Lukasiewicz reproduce următoarele relaţii între principalele categorii silogistice (termeni, moduri, figuri):

Numărul termenilor.....n ,
Numărul figurilor.....2^{n-1} ,
Nr. fig. cu moduri valide.....$1/2\ (n^2 - n + 2)$,
Nr. moduri valide.....$n(3n - 1)$.

Este de presupus că în toate disciplinele logicii pot fi stabilite astfel de raporturi cantitative, însă ele nu sunt esenţiale pentru că, de îndată ce natura obiectelor este precizată, numărul îşi încetează rolul. Natura inferenţei silogistice nu este în nici un fel dependentă de faptul că, dacă există 4 termeni, să zicem, vor exista implicit 44 de moduri valide. Ceea ce se realizează aici este doar o delimitare mai exactă a obiectului cercetat şi nimic mai mult. Aplicaţiile logice ale conceptului

de număr sunt, aşadar, destinate rezolvării unui cu totul alt gen de probleme decât cele de ordin cantitativ.

2) **Numere şi cuantificare**. Având în vedere că logica lucrează cu intensiuni şi extensiuni (proprietăţi şi clase), unii dintre criticii logicismului au avansat ideea că logica ar presupune ideea de număr. Pretenţia de a defini numărul prin concepte logice ar avea de înfruntat atunci, pe lângă obiecţiile formulate la început, şi pericolul circularităţii. Acest lucru devine vizibil în cazul cuantorilor. Dacă la cuantorul universal este suficientă ideea de clasă, cuantorul particular presupune şi ideea de număr, căci el înseamnă: „există cel puţin *un*" sau „există *un singur*".

Or, acest „un", respectiv „un singur", nu este străin de *unu* din aritmetică, chiar dacă nu îl anunţă explicit.

Dacă cuantorul universal este cât de cât precis (el vizează clasa ca întreg), cuantorul existenţial este, dimpotrivă, imprecis. Spunând că „există cel puţin un" noi lăsăm deschisă problema dacă e vorba despre un singur individ, de mai mulţi sau chiar de toţi. Simbolic, acest lucru se explică prin echivalenţa:

$$\forall x\, Fx =_{df} Fa_1 \vee Fa_2 \vee \ldots$$

Nevoia de-a elimina imprecizia în raport cu cuantorul existenţial a condus în ultima instanţă la introducerea cuantorilor numerici. Prima şi cea mai simplă cuantificare numerică este dată de expresia „$\forall !x\, Fx$" care se citeşte: „există numai un singur individ x astfel că F de x".

Evident, procedeul poate fi extins la n indivizi ($n \geq 2$). Este interesant, însă, că şi un cuantor numeric cum ar fi „$\exists !2x$" poate fi definit prin cei doi cuantori de bază:

$$\exists !2x\, (Fx) =_{df} \exists x\, \exists y\, (Fx \bullet Fy \bullet \forall z(Fz \rightarrow (z = x \vee z = y))).$$

Un interes special prezintă cuantorii nuanţaţi: „există numai un x astfel că..."; sau: „există cel puţin un x...".

Pot interveni apoi nuanțări care nu invocă neapărat un concept numeric, cum ar fi: „cei mai mulți *x*...", „majoritatea elementelor x..." ș.a.

Chiar dacă cuantificarea numerică aduce unele avantaje, acestea sunt totuși limitate pentru că: *a*) se pierd o serie de legi logice cum ar fi legile lui de Morgan, indispensabile unei teorii satisfăcătoare a deducției, *b*) în unele situații impreciziile cuantorilor $\forall$, $\exists$ reapar la nivelul cuantorilor numerici, *c*) cu excepția unor sectoare restrânse ale logicii, acești cuantori nu se dovedesc a fi de interes general. În plus, ei sunt greu de mânuit în calcul. La aceasta se mai adaugă faptul că în cele mai multe cazuri, cuantorii numerici se pot defini prin cuantorii de bază, cum s-a văzut deja.

3) **Cardinalitate și decizie**. Operația de cuantificare este relativă la domeniu (= mulțimea pe care sunt definite predicatele), motiv pentru care determinările numerice la nivelul cuantorilor sunt în strictă dependență de determinările numerice ale mulțimii domeniu. Numai că, în timp ce la nivelul cuantorilor intervine ideea de număr natural, la nivelul domeniilor intervine ideea de cardinalitate sau de număr cardinal. Reamintesc că numerele naturale sunt numerele cardinale cărora li se aplică principiul inducției matematice. Desigur că dezvoltarea celor două concepte urmează căi și forme diferite în aritmetică și teoria mulțimilor.

Aplicațiile în logica predicatelor ale conceptului de număr cardinal sunt legate, în principal, de problema deciziei. După cum se știe, această disciplină logică nu este decidabilă, în sensul că nu există procedee generale prin care să se poată recunoaște în mod univoc starea logică a formulelor. Problema deciziei se „despică" aici într-o serie de cazuri particulare, cele mai multe dintre ele fiind date de un anumit tip de cardinalitate al domeniului. Există deci o relație directă între starea

logică a unei formule şi cardinalitatea domeniului. „Făcând abstracţie de acele formule care sunt universal valide, arată Ackermann, şi de cele care nu au această proprietate în nici un domeniu, asertarea validităţii (sau realizabilităţii) unei formule este echivalentă cu un anumit enunţ despre numărul cardinal al domeniului" (1; 22). De altfel, conceptul de număr cardinal intervine chiar în anumite formulări ale problemei deciziei. După Ackermann, a decide înseamnă:

a) A decide pentru orice formulă dacă este validă sau nu.

b) A decide pentru orice formulă dacă este universal validă. Dacă nu este astfel, a decide dacă nu este validă în nici un domeniu sau dacă este validă numai în unele domenii. În acest ultim caz trebuie determinat *numărul cardinal* al domeniilor pentru care ea este validă.

c) A decide pentru orice formulă dacă este sau nu validă în toate domeniile cu un *număr finit* de elemente.

A. Church, A. Turing ş.a. au demonstrat imposibilitatea soluţiei pentru problema deciziei în formularea *a*) şi *b*), iar B. A. Trachtenbrod în formularea *c*).

Redau mai jos câteva din teoremele logicii predicatelor care determină starea logică a formulelor numai în baza cardinalităţii domeniului:

***Teorema* 1**. Dacă o formulă din logica predicatelor care conţine predicate de o singură variabilă este realizabilă într-un domeniu M, atunci ea este realizabilă şi într-un domeniu M' ce conţine cel mult 2^n elemente (n este numărul predicatelor din formulă).

***Teorema* 2.** Dacă o formulă din logica predicatelor ce conţine predicate de o singură variabilă este adevărată pentru orice domeniu format din 2^n elemente, unde n este numărul predicatelor din formulă, atunci formula este identic adevărată.

Teorema 3. Dacă o formulă este realizabilă într-o mulţime infinită, atunci ea este realizabilă şi într-o mulţime numărabilă (teorema lui Löwenheim).

***Teorema* 4**. Dacă o formulă care nu conține variabile individuale libere, dar care poate conține constante individuale, este realizabilă într-un domeniu oarecare, atunci ea este realizabilă într-un domeniu finit sau numărabil (teorema lui Löwenheim).

În toate situațiile descrise de aceste teoreme apare atât conceptul de număr cardinal cât şi categoriile numerice de finit, infinit şi numărabil. Dacă domeniile sunt mulțimi finite, atunci numărul de elemente poate fi specificat sau nu.

O serie de teoreme atestă starea logică a formulelor în domenii vide. Ne dăm seama, aşadar, că în logica predicatelor conceptul de număr intervine foarte frecvent în formularea şi rezolvarea problemei deciziei, care, aşa cum se ştie, este problema fundamentală a logicii.

4) ***Cardinalitate, polivalență şi modalitate***. Am arătat în primul capitol că cele mai importante sisteme polivalente şi modale pot fi exprimate într-un limbaj aritmetic în care mulțimea valorilor logice este reprezentată prin diferite mulțimi de numere. Pornind de la asemenea reprezentări aritmetice s-a reuşit generalizarea sistemelor respective pe domenii cu valori infinite. Vorbim astfel de „familii de sisteme" de tip Lukasiewicz, Bocivar, Kleene, Post ş.a.

Să luăm pentru exemplificare sistemul trivalent al lui Lukasiewicz notat cu L_3. Pentru că sistemul prezintă unele dificultăți de interpretare, Lukasiewicz procedează la anumite generalizări, obținând sisteme n-valente şi chiar infinit valente. În acest ultim caz este indiferent dacă mulțimea valorilor logice este de cardinal $\aleph_0$ sau $\aleph_1$, cu alte cuvinte, dacă este infinit numărabilă sau nenumărabilă. Simbolic, acest lucru se exprimă prin identitatea:

$$Cn\,[L_{\aleph 0}(A)] = Cn\,[L_{\aleph 1}(A)]\,,$$

unde „Cn" este conceptul de *consecinţă logică*, iar *A* mulţimea axiomelor din sistemul respectiv.

Notând cu $T(L_n)$ mulţimea tautologiilor din sistemul L_n, Ackermann a demonstrat o importantă metateoremă ce stabileşte un raport direct între cardinalitatea mulţimii de valori logice şi mulţimea tautologiilor din familia de sisteme Lukasiewicz:

$$T(L_{\aleph 0}) \subset T(L_{kn}) \subset T(L_{2n}) \subset T(L_n) \subset T(L_2).$$

Acest rezultat are la bază faptul că tautologiile din L_m sunt incluse în tautologiile din L_n dacă şi numai dacă există un întreg *k* astfel că $k(n - 1) = (m - 1)$.

O serie de generalizări interesante a dat Gödel în raport cu sistemul său G_3 definit pe intervalul [0,1] astfel:

$$\neg x = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = 0 \\ 0, \text{ dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

$$(x \bullet y) = \min(x, y)$$

$$(x \vee y) = \max(x, y)$$

$$(x \rightarrow y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x \leq y \\ y, \text{ dacă } x > y \end{cases}$$

$$(x \equiv y) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = y \\ \min(x, y), \text{ dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Toate teoremele calculului propoziţional intuiţionist (CPI) sunt teoreme în G (nu şi invers). Pentru cazul special în care $n = \aleph$ se obţine sistemul $G_\aleph$ ale cărui teoreme sunt teoremele CPI.

Gödel a demonstrat că nici un calcul polivalent finit nu poate reproduce toate teoremele CPI, altfel spus, că logica intuiționistă nu este o logică finitistă.

Câteva cuvinte acum despre caracterul infinitist al logicilor modale. În 1936, St. Jaskowski a elaborat un procedeu aritmetic prin care se pot obține sisteme polivalente plecând de la produsul aritmetic a două sau mai multe sisteme date.

Despre ce este vorba?

Dacă S_1 şi S_2 sunt două sisteme oarecare, putem forma sistemul produs $S_1 \times S_2$, astfel că:

a) Valorile logice în $S_1 \times S_2$ vor fi perechile ordonate $<a_i, b_j>$ unde $a_i \in S_1$ şi $b_j \in S_2$.

b) Valoarea logică a unei expresii E este $<a_i, b_j>$ în $S_1 \times S_2$ dacă şi numai dacă valoarea expresiei E este a_i în S_1 şi b_j în S_2.

Negația şi ceilalți operatori logici se definesc în $S_1 \times S_2$ după regulile:

$R_1)$ $\neg< a_i, b_j > = <\neg a_i, \neg b_j >$

$R_2)$ $< a_i, b_j > * < a'_i, b'_j > = < a_i \ * a'_j \ ; b_i .* b'_j >$

(Aici „ * “ poate oricare din operatorii &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$).

Cele mai studiate sisteme produs sunt cele obținute din produsul unui sistem cu el însuşi. Să notăm cu „Π“ operația produs în raport cu sistemul S:

$\Pi_K S = S \times S \times ... \times S$ (de k ori)

$\Pi S = S \times S \times ...$

După cum arată N. Rescher în lucrările sale *Topics in philosophical logic* şi *Many valued logics*, sistemul modal S5 este rezultatul produsului infinit $\Pi C2$ unde C2 este sistemul propozițional bivalent.

În ПС2 valorile logice vor fi şiruri infinite de 1 şi 0 cu care am notat adevărul şi falsul în C2. Singura valoare desemnată este şirul infinit 111... .

Regulile de adevăr se obţin prin particularizarea celor două reguli generale date mai sus. Lor li se adaugă reguli speciale pentru operatorii modali:

Lp = 111... , dacă p = 111 ...
000... , dacă p ≠ 111 ...
Mp = 111... , dacă p ≠ 000 ...
0 00... , dacă p = 000 ...

Desigur, se poate pune şi altfel în evidenţă caracterul infinitist al sistemelor modale de tip Lewis; aici m-am limitat la o simplă exemplificare luând ca punct de plecare un procedeu aritmetic. Scopul urmărit a fost de a vedea ce rol joacă în sistemele polivalente şi modale categoriile numerice discutate până acum şi nu să demonstrăm un rezultat sau altul.

4. ESTE STRUCTURA (FORMALĂ) SPECIFICĂ MATEMATICII?

Un alt concept matematic care s-a dezvoltat pe terenul matematicii moderne şi care s-a dovedit util pentru anumite aplicaţii cu caracter logic este conceptul de *structură*, sau de *structură formală*, cum preferă unii autori să îl numească. Caracterul formal al structurii se referă la faptul că se face abstracţie de natura concretă a elementelor, acordându-se atenţie doar relaţiilor dintre elemente şi proprietăţilor acestor relaţii. „Trăsătura comună – arată Bourbaki – a diverselor noţiuni cuprinse sub acest nume generic este că ele se aplică unor mulţimi de elemente a căror natură *nu este specificată*; pentru a deveni o structură se dau una sau mai multe relaţii în care intervin aceste elemente (...), se postulează pe urmă că acolo unde relaţiile date satisfac anumite condiţii (care sunt enumerate) acestea sunt axiomele structurii“ (9; 545).

Sensul termenului „formal" este întrucâtva diferit aici de sensul lui logic care trimite în principal la ideea de formă logică. Desigur, între ele există puncte comune în baza cărora se poate face trecerea de la o accepţiune la alta şi care explică într-o oarecare măsură posibilitatea introducerii conceptului de structură în logică.

Pasajul reprodus mai sus după Bourbaki este important nu numai pentru lămurirea ideii de formal, ci şi pentru o eventuală definiţie a conceptului de structură. Aceasta s-ar putea da ca o mulţime nevidă pe elementele căreia s-a definit un sistem de operaţii şi relaţii ce verifică anumite axiome. Pentru ilustrare să considerăm mulţimea $A = \{ a, b,... \}$, relaţia „=" (egalitatea) şi o operaţie oarecare „* ", astfel că, pentru orice $a, b, c \in A$, au loc relaţiile:

$a * (b * c) = (a * b) * c$,
$a * e = a = e * a$,
$a * a' = e = a'\ a$.

O asemenea structură, redată simbolic prin {A, *}, este cunoscută în matematică sub denumirea de *grup*. Mulţimea A poate fi mulţimea numerelor întregi, iar „ * " operaţia de înmulţire sau adunare. Aceasta înseamnă că structurile $\{Z, \times\}$, $\{Z, +\}$ sunt exemple de grupuri în matematică. Se pot da în continuare foarte multe astfel de exemple pe care nu consider necesar să le enumăr aici. Ideea de bază este că orice mulţime de entităţi (numere, funcţii, vectori etc.) care satisfac axiomele de mai sus, vor satisface implicit orice teoremă dedusă în mod logic din axiome. Se realizează astfel o „considerabilă economie în efortul de gândire" (Bourbaki), structurile dovedindu-se din acest punct de vedere veritabile instrumente în cercetarea matematică.

Cu toate că dezvoltarea structuralistă a matematicii este de dată relativ recentă, ideea de structură apare încă din secolul XIX datorită, între altele, şi cercetărilor lui G. Boole în domeniul logicii. Se poate spune că „algebra booleană" (sau „algebra logică", cum mai este ea denumită astăzi) este un exemplu de structură apărută pe terenul logicii care s-a generalizat, treptat, şi în matematică.

Elaborarea teoriei mulţimilor de către G. Cantor, ca şi perfecţionările aduse la sfârşitul secolului trecut metodei axiomatice au făcut ca ideea de structură să câştige tot mai mult în claritate şi să cucerească spaţii tot mai vaste în ştiinţa matematicii. Practic, au fost identificate structuri în teorii matematice considerate în mod tradiţional ca independente între ele. S-a realizat astfel o unificare din „interior" a unei matematici ce se comporta ca un veritabil „univers în expansiune". În principal, această sarcină a fost asumată de proiectul bourbakist de reorganizare a matematicii, proiect despre care s-a spus, pe bună dreptate, că reprezintă următorul mare eveniment din dezvoltarea matematicii după programele funcţionaliste de la începutul secolului XX.

După cum se afirmă adeseori în textele bourbakiste, acest proiect nu comportă o dimensiune fundaţionistă, scopul lui fiind mult mai modest, şi anume de a arăta că în actualul ei stadiu de dezvoltare, matematica se organizează în conformitate cu anumite tipuri de structuri. Aceste tipuri de structuri sunt clasificate de Bourbaki în trei mari categorii – structuri algebrice, structuri de ordine şi structuri topologice.

Mulţi filosofi din zilele noastre au încercat să găsească afinităţi între programul bourbakist şi orientări tradiţionale din filosofia logicii şi a matematicii. H. Putnam, de exemplu, asociază acestui program o poziţie logică similară logicismului pe care o intitulează „filosofia lui *dacă... atunci...* ca filosofie a matematicii" (*if - thenism as philosophy of*

matematics). Aşa cum preciza Russell în *Introducere* la *Principia Mathematica*, această teză nu trebuie înţeleasă în sensul că orice enunţ matematic este de forma „dacă... atunci...", ci în sensul că, dacă anumite entităţi matematice verifică cutare proprietăţi, ele verifică implicit o serie de alte proprietăţi care sunt consecinţele acestora. Aşadar, matematica nu se ocupă cu un nou gen de entităţi – structurile – ci cu derivarea unor noi teze din noi axiome prin intermediul logicii (luată în sensul de teorie a cuantificării). Ierarhizarea deductivă a matematicii ajunge astfel până la principii logice.

O interpretare de inspiraţie intuiţionistă va încerca G. T. Kneabone (43; 325) plecând de la unele lucrări explicative elaborate de Bourbaki cum ar fi articolul „Arhitectura matematicii" (8) sau memoriul adresat de Bourbaki Asociaţiei Internaţionale de Logică Simbolică. Matematica – se arată în acest memoriu – nu are nevoie de nici un fel de legitimare din partea logicii sau filosofiei, ci trebuie considerată ca ceva dat. Aceasta pentru că „demonstraţiile există înainte ca structura lor să poată să fie analizată logic" (cf. Kneebone, pag. 329).

Se apreciază în continuare că „logica nu poate fi nici mai mult, nici mai puţin decât gramatica limbajului utilizat în matematică, un limbaj care există mai înainte ca gramatica lui să poată fi construită" (*op. cit.*, pag. 329).

Întrucât la nivel logic apar toate „elementele constitutive" ale structurii, este firesc să vorbim despre aplicaţiile logice ale structurilor matematice şi chiar despre structuri pur logice. Pentru început voi trece în revistă câteva din principalele structuri matematice din clasificarea făcută de Bourbaki.

1) ***Structuri algebrice***. Am vorbit deja despre una din principalele structuri algebrice - *grupul*. În general, o structură algebrică este caracterizată prin una sau mai multe operaţii (numite *legi de compoziţie*) şi de axiomele corespunzătoare.

M. H. Stone este primul autor care a identificat în logică structuri algebrice de grup relativ la operatorii logici „+„ (disjuncţie exclusivă) şi „≡“ (echivalenţă):

$((p + q) + r) = (p + (q + r))$, $((p \equiv q) \equiv r) = (p \equiv (q \equiv r))$,
$(p + f) = P$, $(p \equiv v) = p$,
$(p + p) = f$, $(p \equiv p) = v$.

Operaţiile „+“, „≡ “ sunt comutative, deci şi grupurile {P, +}, {P, ≡} sunt grupuri comutative (sau abeliene). Dacă, în plus, adăugăm operatorii „•“ (conjuncţie) şi „∨“ (disjuncţie neexclusivă) precum şi axiomele:

$$[p \bullet (q + r)] = [(p \bullet q) + (p \bullet r)],$$
$$[p \vee (q \equiv r)] = [(p \vee q) \equiv (p \vee r)].$$

obţinem structurile de inel {P, +, •}, {P, ≡, ∨ }.

Structura algebrică de *corp*, o altă structură fundamentală pentru matematică, aduce deja unele particularităţi. Strict vorbind, ea este punctul în care matematica începe să se distanţeze de logică. Reamintesc că este corp o conjuncţie de inel şi de grup în care operaţiile sunt distributive una în raport cu cealaltă. Gr. Moisil a formulat pentru logică un concept mai slab de corp pe care l-am putea numi, după Gh. Enescu, „corp logic“ sau „cvasicorp“. Această structură adaugă la condiţiile de inel următoarele particularităţi:

$p \bullet v = v \bullet p = p$, $p \vee f = f \vee p = p$,
$p \bullet f = f \bullet p = f$, $p \vee v = v \vee p = v$,
$p \bullet p = p$, $p \vee p = p$.

Este vorba, cum se poate uşor observa, de o *varietate* în raport cu modelul sau cu conceptul clasic de corp şi nu de o simplă abatere de la axiomele corpului, cum au considerat unii.

Este de departe vizibil că aceste structuri nu aduc avantaje prea mari pentru logică. Ele pot conduce la unele sistematizări utile în compararea diferitelor sectoare ale logicii, dar toate acestea reprezintă, totuşi, destul de puţin.

O valorificare interesantă a structurii de inel a dat-o Gr. Moisil în logica propoziţiilor prin aşa-numitele „inele de caracteristică".

Prin „caracteristică de inel" înţelegem cel mai mic întreg pozitiv n pentru care are loc relaţia $n \cdot e = 0$. Inelul $\{P, +, \cdot\}$, arată logicianul român, este izomorf inelului claselor de resturi întregi modulo 2 ale cărui legi de compoziţie sunt:

+	1	0
1	0	1
0	1	0

•	1	0
1	1	0
0	0	0

Cu 1 şi 0 am notat clasele de resturi faţă de modulul 2. Astfel, $n \in 0$ dacă m împărţit la 2 dă restul 0; şi $n \in 1$ dacă dă restul 1. Prin relaţiile de congruenţă acest lucru se exprimă astfel:

$n \equiv 0 \pmod 2$ şi $n \equiv 1 \pmod 2$.

Dat fiind că în acest inel are loc relaţia $x'' = x$, rezultă că orice polinom este de gradul întâi şi are forma:

1) $f(x) = ax + b$ (pentru o variabilă),
2) $f(x, y) = axy + bx + cy + d$ (pentru două variabile).

Se poate calcula acum valoarea coeficienţilor a, b, c, d pentru valorile 1şi 0 ale variabilelor pe care substituindu-le apoi în 1) şi 2) obţinem:

3) $f(x) = [f(1) - f(0)]x - f(0)$
4) $f(x, y) = [f(1,1) - f(0,1) - f(1,0) + f(0,0)]xy + [f(1,0) - f(0,0)x + [f(0,1) - f(0,0)]y + f(0,0)$.

Dezvoltările 3) şi 4) după variabilele x, y pot fi interpretate ca funcţii de adevăr pentru care obţinem mai departe definiţiile:

$\sim x = 1 - x$,
$x \bullet y = xy$,
$x \vee y = x + y - xy$,
$x \rightarrow y = 1 - x + xy$,
$x \equiv y = 2xy - x - y + 1$.

Toate calculele le-am făcut în aritmetica numerelor întregi. Dacă le refacem în aritmetica claselor de resturi întregi modulo 2 obţinem:

$\sim x = 1 + x$,
$x \bullet y = xy$,
$x \vee y = x + y + xy$,
$x \rightarrow y = xy + x + 1$,
$x \equiv y = x + y + 1$.

O corelare algebrică asemănătoare dă Moisil şi pentru logica trivalentă a lui Lukasiewicz. Cele trei valori logice din acest sistem sunt interpretate prin clasele de resturi întregi modulo 3 în care 1 este adevărul, 0 este falsul, iar 2 este posibilul. Tabelele pentru operatorii +, •, se reconstruiesc asemănător:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Un polinom de o variabilă este de gradul doi şi va avea forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ pe care o putem dezvolta după valorile 0, 1, 2 ale variabilei x:

$$f(x) = 2(x - 1)(x - 2)f(0) + 2x(x - 2)f(1) + 2x(x - 1)f(2) .$$

Prin interpretări corespunzătoare obţinem mai departe definiţia negaţiei (N) precum şi definiţiile operatorilor modali mai importanţi: L (necesar), M (posibil), Q (contingent) şi U (imposibil):

$Nx = 2x + 1,$
$Lx = 2x\ (x + 1),$
$Mx = x^2,$
$Qx = x^2 + x + 1,$
$Ux = 2x^2 + 1 .$

Inelele de caracteristică studiate de Moisil sunt importante pentru posibilitatea redefinirii operatorilor logici, inclusiv a celor modali, în diferite sisteme de aritmetică modulară. Definiţiile obţinute de el sunt similare celor examinate în primul capitol ceea ce înseamnă că aritmetizarea logicii poate porni şi de la o aplicaţie de ordin algebric.

2) ***Structuri de ordine***. Dacă în structurile algebrice rolul central revine operaţiilor şi proprietăţilor lor formale, în structurile de ordine acest rol revine relaţiilor. În logică se studiază câteva relaţii fundamentale cum este implicaţia, echivalenţa, relaţia de consecinţă logică ş.a. Unele dintre aceste relaţii au proprietăţile relaţiei de ordine tare, altele sunt relaţii de ordine slabă (sau parţială). Reamintesc că o relaţie R este de ordine tare (sau strictă) dacă este ireflexivă, asimetrică şi tranzitivă. Dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă, atunci ea este

de ordine parţială. Presupun cunoscute aceste proprietăţi şi nu insist asupra lor.

***Definiţia* 1**. Se numeşte mulţime ordonată o pereche de tipul $\{A, \leq\}$unde $A \neq \emptyset$, iar $\leq$ este o relaţie de ordine (a nu se confunda cu relaţia *mai mic sau egal* din matematică pe care o simbolizează în mod obişnuit).

Din examinarea structurilor algebrice a rezultat că unele elemente au în raport cu operaţiile un statut mai special, cum este elementul neutru în teoria grupurilor, sau elementul invers. Acelaşi lucru se întâmplă şi în structurile de ordine, numai că aici elementele speciale prezintă o anumită simetrie:

Minim - maxim,
Minimal - maximal,
Minorand - majorand,
Margine inferioară - margine inferioară.

Cu ajutorul acestor concepte pe care le presupun de asemenea cunoscute, se pot defini câteva dintre structurile de ordine, mai importante cum ar fi: latice, filtru, ideal, algebră booleană ş.a.

***Definiţia* 2**. Fie tripletul $\{A, \top, \bot\}$ unde A este ordonată de relaţia $\leq$ iar $\top$, $\bot$ sunt două operaţii binare. Dacă pentru orice $x, y \in A$ au loc relaţiile:
Inf (x, y) = x $\top$ y
Sup (x, y) = x $\bot$ y
atunci „$\leq$" este o ordine laticiară, iar $\{A, \leq\}$o latice.

Axiomele laticei se pot reformula cu ajutorul celor două operaţii:

$x \perp x = x$ $\qquad$ $x \top x = x$

$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z$ $\qquad$ $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$

$(x \perp y) \top y = y$ $\qquad$ $(x \top y) \perp y = y$.

Un exemplu logic de latice este $\{P, \vee, \bullet\}$ unde $Inf(p, q) = p \bullet q$ şi $Sup(p, q) = p \vee q$, iar „$\rightarrow$" este relaţia de ordine laticiară.

Caracteristic pentru structura de latice este principiul dualităţii potrivit căruia într-o axiomă sau teoremă putem înlocui peste tot pe „$\perp$" cu „$\top$" şi pe „$\leq$" cu „$\geq$" obţinând tot o axiomă sau teoremă. În exemplificarea logică a laticei, $p \rightarrow (p \vee q)$ este duală cu $(p \bullet q) \rightarrow p$.

Plecând de la axiomele laticei putem defini conceptele de *filtru* şi *ideal*:

***Definiţia* 3**. O mulţime A' a unei latici A este filtru în A dacă pentru orice $x, y \in A'$ au loc condiţiile:

$x, y \in A' \rightarrow x \top y \in A'$,
$x \in A' \bullet x \leq y \rightarrow y \in A'$.

Categoria duală filtrului este *idealul* ale cărui axiome se obţin din axiomele de mai sus făcând substituţiile conform cu principiul dualităţii. În logică, $\{P, \bullet\}$, $\{P, \vee\}$ sunt filtru, respectiv, ideal.

Un rol aparte în structurile de ordine îl au elementele *min* şi *max* pe care le numim „element prim" (sau „zero") şi „element unitate" şi pe care le notăm, de regulă, cu „0" şi „1".

Să presupunem că o latice îl are pe 0 ca element prim şi pe 1 ca element unitate. Un element c din A se va numi $\top$-complementul lui x în A dacă c este cel mai mic element astfel că $x \top c = 0$. Dacă există şi un element c' din A astfel că $c' \perp x = 1$, atunci c' este $\perp$- complementul lui x. Noţiunile de $\top$-complement şi $\perp$- complement sunt duale ($\top$-complementul se mai numeşte şi pseudocomplement).

***Definiţia* 4**. Un element c este complementul lui x în A dacă este simultan T-complement şi $\perp$- complement, adică dacă au loc relaţiile:

$x \mathsf{T} c = 0$
$x \perp c = 1$.

***Definiţia* 5**. Fie x, y elemente într-o latice A. Un element c este pseudocomplementul lui x relativ la y dacă c este cel mai mare element din A astfel că $x \mathsf{T} c \leq y$.

Pseudocomplementul lui x relativ la y se va nota cu „$x \Rightarrow y$". Prin definiţie
$(x \leq (y \Rightarrow z)) \equiv ((x \mathsf{T} y) \leq z)$

În baza conceptelor nou introduse se pot defini mai departe câteva specii importante de latici.

a) ***Latice completă***. Dacă pentru orice $A' \subset A$ $(A' \neq \emptyset)$ există *Inf* $A' = \mathsf{T}A'$ şi *Sup* $A' = \perp A'$ atunci A este o latice completă. Orice latice completă $\{A, \perp, \mathsf{T},\}$ are element zero şi element unitate

b) ***Latice distributivă***. O latice A este distributivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$ au loc relaţiile:
$x \mathsf{T}(y \perp z) = (x \mathsf{T} y) \perp (x \mathsf{T} z)$
$x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \mathsf{T} (x \perp z)$.

c) ***Latice complementată***. O latice A în care fiecare element x admite un complement x' se numeşte complementată.

d) ***Algebră booleană***. O latice completă A, distributivă şi complementată se numeşte algebră booleană.

e) ***Algebră pseudobooleană***. Orice latice A pseudocomplementată cu element prim este o algebră pseudo-booleană.

Fie $x \in A$ şi pseudocomplementul lui, x'. În sistemul de notaţii pe care l-am adoptat, următoarele relaţii sunt caracteristice pentru algebra pseudobooleană:

$x' = (x \Rightarrow 0)$
$x \top x' = 0.$

Într-o astfel de latice nu există element unitate şi, ca atare, nici $\perp$ - complement).

Fiecare din structurile laticiare introduse corespunde unui anumit tip de sistem logic. Pentru a face mai clară această idee, conceptele laticiare introduse primesc următoarele interpretări logice:

a) 1 şi 0 reprezintă adevărul respectiv falsul.
b) $`$, $\perp$, $\top$ reprezintă operatorii logici ~, $\vee$, •.
c) Complementul x' (resp. $X \Rightarrow 0$) este $\sim x$ (resp. $x \rightarrow f$).
d) „$\leq$" este relaţia implicativă „$\rightarrow$".

Tabelul de mai jos redă corespondenţele dintre diferitele sisteme logice şi structurile laticiare specifice lor.

Logica	**Structura laticiară corespunzătoare**
Pozitivă	Laticea pseudocomplementată relativ
Pozitivă cu seminegaţie	Laticea pseudocomplementată relativ cu element zero
Minimală	Latice complementată contrapoziţională
Intuiţionistă	Algebră pseudo booleană
Clasică	Algebră booleană

Dacă luăm în considerație și alte sisteme logice, cum ar fi logica polivalentă și modală, atunci va trebui să introducem structuri laticiare mai complexe.

Un tip special de latice pentru sistemele polivalente sunt „algebrele Luckasiewicz", introduse de Gr. Moisil. De notat că diferențele dintre diferitele tipuri de ordine corespund diferențelor dintre diferitele tipuri de implicație care stau la baza sistemelor logice invocate. Proprietățile implicației materiale pot fi foarte bine sistematizate prin axiomele algebrelor booleene de aceea consider acest tip de latice drept structura de bază a logicii[1].

3) ***Structuri topologice***. Fie A, B două mulțimi într-un univers X și D, I două operații numite de *deschidere*, respectiv, de *închidere*. Vom spune că X este un spațiu topologic dacă pentru orice $A \subset X$ există $DA \subset X$ și $IA \subset X$ astfel că:

1. $D(A \cap B) = DA \cap DB$,	1'. $I(A \cup B) = IA \cup IB$,
2. $DDA = DA$,	2'. $IIA = IA$,
3. $DA \subset A$,	3'. $A \subset IA$,
4. $DX = X$,	4'. $I\emptyset = \emptyset$.

Operațiile D, I se interdefinesc cu ajutorul negației:

5. $DA = -I-A$	5'. $IA = -D-A$.

Sistemul $\{X, D\}$ este un spațiu topologic de deschidere, iar $\{X, I\}$ de închidere.

Există două modalități mai importante de aplicare în logică a acestor structuri: *a*) prin păstrarea semnificațiilor

[1] Pentru o discuție mai amplă a conceptului de structură în logică cititorul poate consulta cartea lui Tr. Stirbăț, *Corespondențe structurale în logica modernă*, Editura Junimea, Iași, 1986.

mulţimiste ale elementelor X, A, B, D, I care intervin în axiomele 1-5, 1'-5', şi *b*) prin abandonarea acestor semnificaţii şi aplicarea pur formală (în sensul lui Hilbert) a celor două grupe de axiome.

Iată şi câteva perechi de concepte logice care verifică axiomele structurilor topologice pe care le-am reformulat după Gh. Enescu (*Logica şi structurile topologice*, Analele Univ. Bucureşti, 1986).

a) ***Necesar şi posibil***. Notăm cu L necesarul şi cu M posibilul, iar tautologia şi contradicţia cu T şi C. Următoarele expresii modale reproduc, din punct de vedere formal, axiomele deschiderii şi închiderii:

$$\mathrm{L}(p \bullet q) = Lp \bullet \mathrm{L}q\,, \qquad \mathrm{M}(p \vee q) = \mathrm{M}p \vee \mathrm{M}q,$$
$$\mathrm{LL}p = \mathrm{L}p\,, \qquad \mathrm{MM}p = \mathrm{M}p\,,$$
$$\mathrm{L}p \rightarrow \mathrm{p}\,, \qquad \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{M}p\,,$$
$$\mathrm{L}T = T\,, \qquad \mathrm{M}C = C\,.$$

Cei doi operatori modali se interdefinesc după modelul operatorilor topologici: $\mathrm{L}p = {\sim}\mathrm{M}\,{\sim}p$ şi $\mathrm{M}p = {\sim}\mathrm{L}\,{\sim}p$.

b) *Asertare şi ipoteză*. Notăm cu „$\vdash$" asertarea şi cu „H" ipoteza. Restul simbolurilor rămân aceleaşi:

$$\vdash(p \bullet q) = \vdash p \bullet \vdash q\,, \qquad \mathrm{H}(p \vee q) = \mathrm{H}p \vee \mathrm{H}q\,,$$
$$\vdash \vdash \mathrm{p} = \vdash p\,, \qquad \mathrm{HH}p = \mathrm{H}p\,,$$
$$\vdash \mathrm{p} \rightarrow p\,, \qquad p \rightarrow \mathrm{H}p\,,$$
$$\vdash T = T\,, \qquad \mathrm{H}C = C\,.$$

Evident, au loc definiţiile $\vdash \mathrm{p} = {\sim}H\,{\sim}p$ şi $Hp = {\sim} \vdash {\sim}p$.

*c) **Cuantorul universal şi existenţial.*** Notăm cu T[x] şi C[x] tautologiile, respectiv, contradicţiile care îl conţin pe *x*. Spaţiul topologic de deschidere, relativ la operaţia $\forall$, se defineşte după cum urmează:

$\forall x\,(Fx \bullet Gx) = (\forall x\,Fx \bullet \forall x\,Gx)$,
$\forall x\,Fx \rightarrow Fy$,
$\forall x \forall x\,Fx = \forall x\,Fx$,
$\forall x\,T[x] = T[x]$

În mod analog, operatorul $\exists$ realizează un spaţiul de închidere:

$\exists x\,(Fx \vee Gx) = \exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx$.
$Fy \rightarrow \exists x\,Fx$,
$\exists x \exists x\,Fx = \exists x\,Fx$,
$\exists x\,C[x] = C[x]$.

Cei doi cuantori se definesc în maniera cunoscută: $\forall x\,Fx = \exists x \sim Fx$ şi $\exists x\,Fx = \sim\forall x \sim Fx$. A se vedea, de asemenea, simetriile dintre operatorii $\forall$, $\exists$ şi L, M relativ la axiomele topologice. De altfel, von Wright a construit sistemele sale modale pornind tocmai de la analogiile formale existente între cele două categorii de operatori.

O serie de concepte logice prezintă proprietăţi apropiate de axiomele spaţiilor topologice, dar care diferă totuşi de acestea sub diferite aspecte. Aşa este conceptul de *consecinţă logică*, de exemplu, pe care îl simbolizăm cu *Cn* şi care prezintă următoarele proprietăţi:

$Cn\,(A \vee B) = Cn\,(Cn\,A \vee Cn\,B)$,
$A \subset Cn\,A$,
$Cn\,(Cn\,A) = Cn\,A$,
$Cn\,\varnothing$ = S (S este sistemul deductiv în care se defineşte *Cn*).

De notat că acest concept nu are un corelat logic care să verifice axiomele închiderii. Gh. Enescu vorbeşte în articolul citat despre conceptul de *antecedenţă logică*, concept însă insuficient definit.

Un alt concept logic care prezintă proprietăţi logice similare conceptelor discutate este conceptul de *adevăr*. Dacă notăm cu „*Ap*" propoziţia „Este adevărat *p*", vom constata că „ *A* " verifică atât axiomele deschiderii, cât şi ale închiderii:

$A(p \bullet q) = Ap \bullet Aq$ $\qquad$ $A(p \vee q) = Ap \vee Aq$

$AAp = Ap$ $\qquad$ $AAp = Ap$

$Ap \rightarrow p$ $\qquad$ $p \rightarrow Ap$

$AT = T$ $\qquad$ $AC = C$.

Relaţia $Ap = {\sim}A{\sim} p$ serveşte şi aici ca relaţie de interdefinibilitate. Prin urmare, avem de-a face şi de această dată cu structuri mai slabe, un fel de *varietăţi topologice* în raport cu definiţia clasică a conceptului de spaţiu topologic.

5. CONCLUZII

Din cele prezentate ne-am dat seama că multe concepte matematice se aplică în logică, dar statutul lor aici este mult diferit de statutul lor din matematică. Or, ceea ce interesează în primul rând nu sunt aplicaţiile ca atare, ele nu aduc avantaje considerabile, ci „starea logică" a acestor concepte dacă mă pot exprima astfel. Nici funcţiile logice nu sunt reductibile la funcţiile matematice, după cum nici structurile logice nu sunt simple exemplificări ale structurilor matematice.

Fie că este vorba de logică, fie de matematică, avem prin urmare de-a face cu particularizări ale unor concepte extrem de generale pe care nu le mai putem lega de un domeniu anume. Chiar şi numărul s-a dovedit a nu mai fi un „atom democritic" pentru matematică, cum foarte sugestiv se ex-

primă Gh. Enescu, pentru că şi el poate fi definit în alţi termeni. Numai că definiţia prin clase de echivalenţă nu duce la un concept mai general de număr, cum am văzut că s-a întâmplat cu o serie de alte concepte.

Funcţionarea logică a acestor concepte reclamă un simbolism special, de aceea, analiza simbolismului logic nu trebuie separată de analiza conceptelor pe care el le fixează. Dacă am tratat separat aceste probleme am făcut-o din raţiuni de ordin metodologic şi nu pentru că ele ar fi separate de fapt.

Probleme speciale se ridică în legătură cu conceptul de structură în logică. După cum am încercat să arăt, o anume prioritate o au structurile de ordine, iar dintre acestea în primul rând cele booleene. Totuşi, în ultima vreme îşi fac tot mai mult loc în cercetările logice structurile topologice. Merită consemnată aici observaţia lui Tr. Ştirbăţ cu privire la aportul structurilor topologice în aprofundarea unor sisteme logice de inspiraţie filosofică. Se ştie că filosofia a stimulat în diferite forme dezvoltarea logicii, una din disciplinele logicii de inspiraţie filosofică fiind logica modală. Este curios că sistemele modale pot fi studiate astăzi de pe poziţii matematice foarte avansate cum este topologia. Unitatea gândirii se regăseşte, aşadar, în cele mai abstracte forme de manifestare ale ei, şi anume în filosofie, în logică şi în matematică.

Faţă de toate celelalte ştiinţe, logica dovedeşte o anume aptitudine pentru aplicaţiile de ordin structural dat fiind caracterul ei formal. Ideea de formă logică este corelatul cel mai intim al ideii matematice de structură. În virtutea formei logice se poate vorbi despre „structura propoziţiilor", care, în unele cazuri se apropie destul de mult de structurile matematice. Chiar şi o formă logică foarte simplă cum este *SaP* („toţi *S* sunt *P*") se dovedeşte a avea toate proprietăţile unei relaţii de ordine parţială:

(Ref)	SaS
(Antisim)	$(SaP \,\&\, PaS) \rightarrow S = P$
(Tranz)	$(SaP \,\&\, PaQ) \rightarrow SaQ.$

Aşadar, proprietăţile definitorii ale relaţiei de ordine se „traduc" la nivelul formei logice prin *identitate* (= Ref), *conversiune per accidens* (= Antisim) şi modul silogistic *Barbara* (= Tranz). Iată deci cum structura devine, alături de funcţie, o altă modalitate de analiză logică a propoziţiei.

Desigur, inventarul structurilor logice nu se opreşte aici. Încă din evul mediu se studiază *pătratul logic*, o structură specifică logicii, dar care este la ora actuală atât de generală încât poate fi comparată cu o structură din matematică, cum ar fi grupul. Există încercări de a utiliza această structură dincolo de graniţele logicii, în lingvistică, de exemplu. Să nu uităm apoi că o serie de formaţiuni algebrice au fost constituite în ultimele decenii în vederea aprofundării unor aspecte de ordin semantic. Amintesc câteva dintre ele: 1) algebrele de relaţie (introduse de Tarski), 2) algebrele proiective (introduse de Evrett şi Ulam pentru modelarea calculului cu predicate de ordinul întâi), 3) algebre de închidere (pentru logica modală), 4) algebre cilindrice (introduse de Tarski pentru logica predicatelor de ordinul întâi cu egalitate), 5) algebre poliadice (introduse de Halmos pentru logica predicatelor de ordinul întâi fără egalitate) ş.a. Rămâne de văzut în ce relaţie stau aceste algebre logice cu „structurile mamă" din clasificarea generală făcută de Bourbaki.

III. AXIOMATICA ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ

Metodă prin excelenţă logică – se poate spune că ea este forma cea mai elaborată a metodei deductive – metoda axiomatică a trecut din logică în matematică unde s-a perfecţionat, începând cu secolul XIX, pentru ca, în final, să revină din nou în logică. Din punct de vedere istoric, ea nu este legată numai de numele lui Euclid, ci şi de numele lui Aristotel, care în organizarea silogisticii a avut în vedere existenţa unor *moduri perfecte* şi a unor procedee de reducere la acestea[1].

Văzută din perspectivă actuală, silogistica aristotelică apare ca un sistem desfăşurat în care sunt stabilite anumite „dependenţe" între modurile valide astfel încât ele să apară ca reductibile la modurile perfecte. În reluările moderne s-a pornit tocmai de la aceste dependenţe reuşindu-se axiomatizarea silogisticii, chiar în mai multe variante. Cititorul interesat ar putea încerca unele comparaţii între silogistica lui Aristotel şi axiomatizarea lui Lukasiewicz pe care am reprodus-o în finalul acestui capitol ca o ilustrare a conceptului de *teorie formalizată.*

Câteva elemente de noutate relativ la aplicarea metodei axiomatice apar la Leibniz, deşi nici el nu se ocupă de axiomatica propriu-zisă ci doar de unele probleme particulare ale ei (diferite tipuri de deducţii în sistemul lui de notaţii). De abia la Frege se poate spune că apare primul sistem axiomatic în logică şi deci prima utilizare a metodei într-o formă apro-

[1] La premisele istorice ale metodei axiomatice s-ar mai putea adăuga şi concepţia stoicilor despre schemele de inferenţă. Cinci din aceste scheme erau considerate ca indemonstrabile (Sextus Empiricus). Deşi stoicii nu dispuneau de un concept clar de completitudine, se considera totuşi că aceste scheme sunt suficiente pentru demonstrarea celorlalte scheme valide.

piată de forma ei actuală. Forma definitivă, însă, va fi dată de abia în *Principia Mathematica* şi în lucrările care au apărut de atunci în domeniul logicii.

Istoric vorbind, metoda axiomatică este legată în matematică de numele lui Euclid, care dă prima construcţie axiomatică pentru geometrie. *Elementele* lui Euclid vor rămâne singurul model de construcţie axiomatică în matematică până spre sfârşitul secolului al XIX-lea, odată cu apariţia geometrilor neeuclidiene.

Exceptând unele contribuţii aduse de Decartes, Pascal, Leibniz ş.a. se poate spune că noua eră a axiomaticii debutează la începutul secolului trecut prin contribuţiile hotărâtoare aduse de Peano (în aritmetică), de Hilbert (în geometrie), de Frege şi Russell (în logică) ş.a. „Ducerea la capăt, notează Hilbert, a sarcinii mari asumate de Russell – axiomatizarea logicii – poate fi privită ca încoronare a operei de axiomatizare, în general" (33; 100).

Deşi nu face parte din metodele aşa-zis „matematice", matematica a acaparat în aşa fel metoda axiomatică încât o incursiune în cercetarea naturii sale aproape că devine obligatorie. Există destui autori care văd esenţa matematicii în demonstraţie, logica fiind înţeleasă din acest punct de vedere drept „studiul demonstraţiei matematice".

1. VALORI LOGICE ŞI PREDICATE METATEORETICE

Adevărul şi falsul reprezintă două din categoriile de bază ale logicii formale. Există cel puţin trei mari ipostaze în care apar aceste categorii în logica modernă, şi anume: adevărul ca relaţie (vezi teoria adevărului corespondenţă la Aristotel), adevărul ca predicat metateoretic, şi adevărul ca obiect abstract.

Ideea că adevărul şi falsul pot fi tratate ca două obiecte abstracte, în genul numerelor din matematică, i se datorează

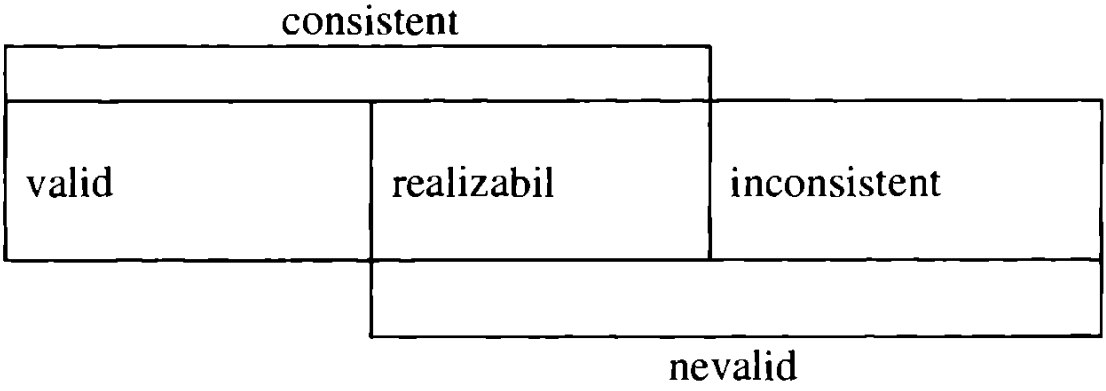
lui Frege, însă ea apare foarte frumos exprimată de J. Lukasiewicz într-una din lucrările sale de început: "prin adevăr, scrie el, înţeleg nu o propoziţie adevărată ci *obiectul* denotat de o propoziţie adevărată, şi prin fals înţeleg nu o propoziţie falsă ci *obiectul* denotat de o propoziţie falsă" (46; 90).

Şi mai departe: „Toate propoziţiile adevărate denotă unul şi acelaşi obiect, şi anume adevărul, şi toate propoziţiile false denotă unul şi acelaşi obiect, şi anume falsul. Eu consider adevărul şi falsul ca pe obiecte singulare în acelaşi sens în care sunt numerele 2 sau 4" (46; 90).

Dacă P, Q, R ... sunt variabile propoziţionale, atunci valoarea lor poate fi v sau f unde v şi f sunt simboluri pentru cele două obiecte abstracte – adevărul şi falsul. Nu se pune problema care anume propoziţie din limbaj stă pentru v şi care pentru f, important este că propoziţiile denotă aceste obiecte pe care le putem trata mai departe ca pe valori ale variabilelor.

O expresie propoziţională care ia valoarea v pentru orice valori posibile ale variabilelor sale se numeşte *lege logică* sau *tautologie*. Se mai folosesc pentru acest gen de expresii denumirile de expresii *logic valide* sau expresii *identic adevărate*. Dacă expresia ia valoarea v pentru unele valori ale variabilelor şi f pentru altele, ea se va numi expresie *realizabilă* sau *contingentă*. În sfârşit, expresiile care iau numai valoarea f se numesc *contradicţii*, expresii *inconsistente* sau expresii *identic false*.

La un loc, expresiile valide şi cele realizabile formează clasa expresiilor *consistente*, iar cele inconsistente şi realizabile formează clasa expresiilor *nevalide*. Kleene sistematizează această clasificare a expresiilor propoziţionale cu ajutorul următoarei figuri:



Câteva observații pe marginea definițiilor date mai sus.

O primă observație ar fi că cele trei concepte au fost asociate în capitolul II funcțiilor de adevăr, însă ele pot fi aplicate la fel de bine expresiilor. În fond, orice expresie introduce (descrie, definește) o funcție de adevăr, de aceea, clasificarea expresiilor urmează îndeaproape clasificarea funcțiilor de adevăr.

Apoi, cele trei concepte se definesc în baza relației semantice dintre expresie și semnificația sa, ele sunt așadar concepte semantice. În capitolul IV vom vedea că aceste concepte se redefinesc din perspectiva conceptului semantic de *model*.

Pentru adevăr în sens semantic se folosește uneori simbolul „|=". În logica propozițiilor prin „|= A" înțelegem „A este logic validă" (sau „tautologie"). M-am rezumat aici la logica propozițiilor însă trebuie știut că aceste concepte se redefinesc pentru fiecare teorie logică în parte.

Probleme speciale a ridicat logica modală unde nu s-a putut defini un concept specific de validitate până la apariția semanticii lumilor posibile. Pentru că voi relua ceva mai târziu aceste probleme nu insist aici asupra lor.

Se pune în mod firesc întrebarea: ce legătură au toate aceste probleme cu sistemul axiomatic și cu metoda axiomatică, în general?

Răspunsul trebuie căutat în rolul pe care îl joacă în logică tautologiile sau legile logice. Am spus cu altă ocazie că aceste legi guvernează în diferite moduri schemele noastre de raţionament. Problema este mult mai amplă însă deocamdată mă voi rezuma la a spune că oricărei scheme valide de raţionament îi corespunde o lege logică, şi invers, oricărei legi logice îi corespunde (potenţial) o schemă validă de raţionare. De exemplu, schema de raţionament cunoscută sub numele de *modus ponens*:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

este asociată legii $((P \rightarrow Q) \bullet P) \rightarrow Q$.

Dar dacă lucrurile stau realmente astfel, se ridică în mod firesc câteva întrebări: *a*) cum recunoaştem noi că o anume formulă este lege logică? *b*) cum se obţin aceste legi logice? *c*) ce raporturi există între diferitele legi logice?

Sistemul axiomatic rezolvă în mod satisfăcător toate aceste probleme, ceea ce ne poate da o primă imagine asupra metodei axiomatice. Ea poate fi luată, fie în sens general (cu privire la teorie), fie în sens restrâns (cu privire la problemă). Şi într-un caz şi în celălalt importanţa sa pentru logică este maximă.

Se înţelege că pentru a rezolva problemele invocate, sistemul axiomatic trebuie să satisfacă câteva condiţii dintre care de bază sunt *consistenţa*, *completitudinea* şi *independenţa*. Dată fiind importanţa lor pentru logică mă voi opri pe scurt asupra fiecăreia.

În sensul său cel mai general, consistenţa înseamnă necontradicţie. Ea poate fi formulată sintactic sau semantic.

1) Un sistem axiomatic este consistent dacă pentru orice formulă A nu se poate demonstra în sistem atât A cât şi $\sim A$ (consistenţa simplă sau consistenţa în sens sintactic).

2) Un sistem este consistent dacă orice formulă demonstrabilă este validă (consistența cu privire la validitate sau semantică).

O generalizare a definiției 2) s-ar putea da în felul următor: un sistem axiomatic este consistent dacă există cel puțin o interpretare pentru care formulele sistemului devin propoziții adevărate.

Tautologiile sau expresiile logic valide sunt adevărate în interpretarea prin „*v*"; şi „*f*" de aceea definiția 2) este un caz particular în raport cu această definiție.

Ulterior s-au mai adăugat încă două sensuri ale termenului consistență:

3) Un sistem axiomatic este consistent dacă există cel puțin o formulă ce nu poate fi dedusă în sistem (consistența în sens lui Hilbert).

4) Un sistem axiomatic este consistent dacă nici o formulă constând dintr-o singură variabilă propozițională nu este teoremă a sistemului (consistența în sensul lui Post).

Dar de ce este necesar ca sistemele axiomatice să fie consistente sau necontradictorii?

„Toate sistemele logice, cât de cât importante, notează P.S. Novicov, sunt construite astfel încât, atunci când unul dintre ele s-ar dovedi contradictoriu, ar însemna că în el sunt deductibile toate formulele şi, de aceea, astfel de sisteme nu pot reflecta deosebirea dintre adevăr şi fals" (55; 104).

O ilustrare simplă a acestei idei s-ar putea da cu ajutorul calculului natural (metodă deductivă fundamentală pentru logică despre care însă nu am vorbit încă până acum). Presupun cunoscute regulile:

$$\text{R1.}\ \frac{A \bullet B}{A, B}, \quad \text{R2.}\ \frac{A}{A \vee B}, \quad \text{R3.}\ \frac{\sim A,\ A \vee B}{B}.$$

Fie acum o teorie T în care s-a putut demonstra contradicția $P \bullet \sim P$. Mai departe, putem proceda după cum urmează:

1. $P \bullet \sim P$	(Supoziție)
2. P	(1, R1)
3. $\sim P$	(1, R1)
4. $P \vee Q$	(1, R2)
5. Q	(3, 4, R3).

Aşadar, într-un sistem în care s-a demonstrat $P \bullet \sim P$ se poate demonstra orice propoziție Q (fiind o propoziție oarecare, Q poate fi adevărată sau falsă).

Observații interesante face Novicov şi cu privire la consistență în sensul 3) de mai sus: "Faptul că într-un calcul (= sistem axiomatic – a.n.) contradictoriu, orice formulă este deductibilă poate fi utilizat pentru demonstrarea necontradicției. În acest sens este suficient să arătăm că există cel puțin o formulă nedeductibilă. De aici rezultă necontradicția calculului" (55; 105).

Într-adevăr, dacă într-un sistem axiomatic oarecare nu este demonstrabilă formula A, atunci nu va fi demonstrabilă nici o altă formulă logic echivalentă cu A (dacă A este formulă realizabilă sau contradicție, atunci nici o astfel de formulă nu este demonstrabilă şi deci sistemul este consistent).

Atât în privința consistenței logice. Cealaltă proprietate, completitudinea, ridică probleme de alt gen, ea vizează capacitatea sistemului de a putea reproduce toate propozițiile adevărate din domeniul supus axiomatizării. Există şi aici o completitudine în sens larg şi alta în sens restrâns.

În sens larg, un sistem este complet dacă orice formulă validă este derivabilă în sistem. În sens restrâns, sistemul este complet dacă adăugarea unei formule nederivabile face sistemul inconsistent. Acest concept de completitudine se nuanțează după sensurile termenului „consistență" examinate mai sus.

Asociată consistenței, completitudinea sporește capacitatea de decizie a sistemului până la limitele maxime ale acestuia – totalitatea formulelor adevărate din domeniul respectiv. În acest caz, sistemul este deciclabil întrucât pentru orice formulă putem spune dacă este teoremă sau această formulă, sau negația ei.

Independența, cea de a treia mare proprietate a sistemelor axiomatice, înseamnă independența axiomelor unui sistem. Întrebarea care se pune în acest caz este dacă o axiomă poate fi dedusă din celelalte axiome ale sistemului, prin regulile de deducție admise, sau dacă este independentă de acestea. Dacă ea nu se poate deduce înseamnă că este independentă iar sistemul în care toate axiomele sunt independente este, la rândul său, independent.

Este de preferat ca axiomele unui sistem axiomatic să fie independente și când spun acest lucru nu mă refer neapărat la criterii de ordin estetic. Adeseori un sistem independent poate genera alte sisteme, fie prin eliminarea unora dintre axiomele independente, fie prin adăugarea de noi axiome, fie prin eliminarea și adăugarea simultană (= înlocuirea) de axiome independente. Să nu uităm că geometriile neeuclidiene au apărut prin acest gen de operații în raport cu axioma paralelelor. Domeniul de semnificații descris prin axiomele respective se modifică și el în mod corespunzător (se poate extinde, restrânge sau poate rămâne neschimbat).

Geometriile neeuclidiene au introdus spații de metrică neeucliduană în care axioma paralelelor nu mai este valabilă. Ceva asemănător s-a întâmplat și în logica intuiționistă cu privire la domeniul valorilor de adevăr.

Cum se demonstrează independența unui sistem?

Demonstrația de independență se face cu ajutorul conceptului de *consecință logică*. Dacă $A_1, A_2, ..., A_n$ sunt axiome și dacă există o interpretare a sistemului în care $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$

sunt adevărate şi A_n falsă, atunci A_n nu este consecinţă logică în raport cu celelalte axiome.

Nefiind consecinţa logică a celorlalte axiome, se spune despre A_n că este independentă de restul axiomelor (pentru fiecare axiomă în parte trebuie găsite astfel de demonstraţii de independenţă). Şi dacă fiecare axiomă a sistemului este independentă, sistemul ca atare este independent.

Câteva observaţii în legătură cu raportul dintre consistenţă şi completitudine. În general, aceste proprietăţi sunt fără legătură în sensul că un sistem poate fi consistent indiferent dacă el este sau nu complet însă nu întotdeauna lucrurile stau în acest fel. Conform teoremei lui Gödel de incompletitudine, sistemele formale de tipul *Principiei Mathematica* sau sistemul Zermelo-Fraenkel din teoria mulţimilor, sunt principial incomplete (nu sunt demonstrabile în sistem propoziţiile care afirmă tocmai consistenţa sistemului).

În demonstrarea acestei teoreme, Gödel a plecat de la un concept mai special de contradicţie numit de el *ω-contradicţie*.

O mulţime K de propoziţii este ω-contradictorie dacă există în K o funcţie propoziţională $F(x)$ astfel încât sunt adevărate atât propoziţiile individuale $F(a)$, $F(b)$, ..., cât şi $\exists x \sim F(x)$.

Cum trebuie să înţelegem această definiţie?

Să presupunem că x ia valori într-un domeniu format numai din două elemente, $D = \{a, b\}$. Definiţia poate fi precizată mai departe astfel:

1) $F(a)$, $F(b)$, $\exists x \sim F(x)$ - adevărate prin supoziţie.
2) $F(a) \bullet F(b)$,
3) $\exists x \sim F(x) = \sim F(a) \vee \sim F(b)$,
4) $\sim F(a) \vee \sim F(b) = \sim(F(a) \bullet F(b))$,
5) $\sim(F(a) \cdot F(b))$.

Prin conceptul de ω-contradicție, Gödel viza contradicția paradoxală și există chiar o strânsă analogie între această idee de contradicție și paradoxul mincinosului.

Fie p_1, p_2, ... propoziții și F, predicatul „fals". Propoziția „Toate propozițiile sunt false" (= paradoxul mincinosului într-una din variantele sale moderne) o simbolizăm cu $\forall pF(p)$. Formăm mai departe propozițiile $F(p_1)$, $F(p_2)$, ..., $F(\forall pF(p))$.

Dar $F(\forall pF(p))$ este totuna cu $\sim \forall pF(p)$, care mai departe este echivalentă cu $\exists p \sim F(p)$.

Conform teoremei lui Gödel, un sistem S care este ω-consistent este incomplet, și invers. Cu alte cuvinte, cele două concepte (ω-consistență și completitudine) sunt în raport de contrarietate:

$$\omega\text{-}cons\ (S) \rightarrow \overline{compl(S)}$$

$$compl\ (S) \rightarrow \overline{non\omega - cons(S)}$$

Cu aceasta, consider că principalele predicate metateoretice ale logicii simbolice sunt suficient precizate. Atrag totuși atenția asupra ambiguității unor termeni ca „valid", „consistent" și „contingent" care ar putea duce la unele confuzii.

În logica generală, validitatea se referă exclusiv la raționamente, față de logica simbolică unde validitatea se referă și la expresii. La rândul ei, consistența poate caracteriza expresiile sau mulțimile de expresii (în sens general, un sistem axiomatic este o mulțime de expresii). În sfârșit, contingența poate fi înțeleasă ca realizabilitate (în logica simbolică) sau ca modalitate (în logica modală). Pentru că între semnificațiile acestor termeni există raporturi logice bine determinate spunem că termenii în cauză se caracterizează prin *ambiguitate logică* sau *sistematică* (denumire introdusă de B. Russell).

2. SISTEME AXIOMATICE ÎN LOGICA PROPOZIŢIILOR ŞI LOGICA PREDICATELOR

Primul sistem axiomatic în logică (în sensul de sistem formal) este cel construit de Frege în *Begriffsschrift*. Între timp s-au construit încă multe altele încât astăzi putem vorbi despre o adevărată clasă de asemenea sisteme[1]. Ele diferă prin tipul axiomelor, numărul lor, regulile de deducţie admise şi încă multe altele. Astfel, mulţimea axiomelor poate să fie finită, infinită şi chiar vidă. Primul caz este cel mai frecvent întâlnit, deşi asistăm şi aici la o tendinţă de reducere a numărului de axiome. Dacă sistemul are o singură axiomă atunci se caută ca ea să fie cât mai simplă (chiar cea mai simplă dacă s-ar putea).

Cazul al doilea corespunde sistemelor cu scheme de axiome, introduse de Von Newmann. Din orice schemă de axiomă se obţin, prin substituţii corespunzătoare, alte axiome. Cum există o mulţime potenţial infinită de substituţii, există implicit o mulţime potenţial infinită de sisteme de axiome.

Cazul al treilea în care mulţimea axiomelor este vidă corespunde deducţiei naturale sau calculului natural, cum mai este cunoscută această metodă în logică. Aici se operează numai cu reguli de deducţie asupra unor expresii luate ca supoziţii (de unde şi denumirea de „calcul al supoziţiilor"). Este discutabil dacă deducţia naturală trebuie luată ca o metodă independentă de metoda axiomatică sau dacă nu cumva ea poate fi privită ca un caz limită de deducţie axiomatică. Părerea mea este că această metodă se plasează între metoda axiomatică şi metoda algoritmică. Se aseamănă cu metoda axiomatică prin faptul că ambele sunt metode deductive. De alt-

[1] A. N. Prior semnala în cartea sa, *Formal Logic* (New York, 1962), nu mai puţin de 80 de asemenea sisteme.

fel, trebuie precizat că ceea ce interesează în deducția naturală sunt deducțiile ca atare și nu doar formulele obținute prin aceste deducții.

Spre deosebire de metoda axiomatică, aceasta se aplică exclusiv formulelor valide, deducția naturală se aplică formulelor consistente, în general. Din anumite formule, luate ca supoziție, se deduc alte formule urmărindu-se validitatea acestor deducții.

Asemănarea cu metoda algoritmică se datorează faptului că ambele aplică reguli. Totuși, în deducția naturală regulile nu se aplică în mod mecanic, ca în calculul matematic obișnuit. De aceea, termenul „calcul" nu trebuie, să inducă în eroare pentru că el circulă în logică cu mai multe sensuri. Voi vorbi pe larg despre aceste probleme în capitolul următor, deocamdată vreau să trec în revistă câteva dintre sistemele axiomatice mai importante din logica propozițiilor și logica predicatelor.

Regulile de deducție în aceste sisteme sunt regula substituției și regula detașării pe care le presupun cunoscute.

1) *Sistemul lui Frege*:
A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$
A5. $\sim\sim A \rightarrow A$
A6. $A \rightarrow \sim\sim$ a.

2) *Sistemul Principiei Mathematica*:
A1. $A \rightarrow (A \vee B)$
A2. $(A \vee A) \rightarrow A$
A3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$
A4. $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow (A \vee C))$
A5. $(A \vee (B \vee C)) \rightarrow (B \vee (A \vee C))$.

(În 1926, P. Bernays a demonstrat că axioma A5 nu este independentă de celelalte axiome. Metoda lui este folosită şi astăzi în demonstrarea independenţei axiomelor).

3) *Sistemul Hilbert - Ackermann*:
A1. $A \rightarrow (A \vee B)$
A2. $(A \vee A) \rightarrow A$
A3. $(A \vee B) \rightarrow (B \vee A)$
A4. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((C \vee A) \rightarrow (C \vee B))$.

4) *Sistemul lui Lukasiewicz*:
A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)$.

5) *Sistemul lui Church*:
A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(A \rightarrow f) \rightarrow f) \rightarrow A$.
(*f* este constanta logică *fals*; $A \rightarrow f$ joacă aici rolul de negaţie a lui A, iar A3 exprimă, în formă implicaţională, proprietatea dublei negaţii).

6) *Sistemul Tarski - Bernays*:
A1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
A2. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$
A3. $(A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$.

Dintre sistemele cu o singură axiomă voi menţiona sistemele pentru implicaţie şi echivalenţă şi sistemul lui Nicod pentru incompatibilitate.

În ce priveşte implicaţia, cele mai importante sisteme cu o singură axiomă sunt cele construite de Lukasiewicz între 1930 şi 1936. Iată trei dintre aceste axiome implicaţionale:

$((A \to B) \to (C \to D)) \to (E \to ((D \to A) \to (C \to A)))$
$((A \to B) \to (C \to D)) \to ((D \to A) \to (E \to (C \to A)))$
$((A \to B) \to C) \to ((C \to A) \to (D \to A))$.

O serie de sisteme cu o singură axiomă au fost construite pentru echivalență, însă J. Lukasiewicz a demonstrat că dintre acestea

$$(A \equiv B) \equiv ((C \equiv B) \equiv (A \equiv C))$$

este cea mai simplă. O simplificare asemănătoare va da logicianul polonez şi pentru incompatibilitate:

$$(A/(B/C))/\{[D/(D/D)]/[(D/C)/((A/D)/(A/D))]\}$$

(deşi numărul variabilelor este aici mai mic decât în versiunea lui Nicod, lungimea formulei este practic aceeaşi).

Regula detaşării pentru incompatibilitate se formulează astfel: dacă A şi A/(B/C) sunt teze logice atunci C este teză logică[1].

Începând cu primele decenii ale sec. XX s-au construit o serie de sisteme axiomatice pentru logicile polivalente şi modale. Un interes aparte îl prezintă sistemele de logică intuiționistă.

7) *Sistemul lui Heyting*:
A1. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$
A2. $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$
A3. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$

[1] Aspecte mai speciale legate de axiomatizarea logicii propozițiilor cititorul poate găsi în studiile lui P. Bieltz, *Sisteme axiomatice pur implicaționale*, Analele Univ. din Bucureşti, seria Filosofie, Anul XXXVII, 1988, p. 46-55 şi *Sisteme axiomatice cu constante propoziționale şi variabile functoriale*, Analele Univ. Bucureşti, seria Filosofie, Anul XXXIX, 1990, p. 70-89. În numărul din 1991 al Analelor Univ. Bucureşti, logicianul român semnează de asemenea un interesant studiu cu privire la deducția naturală în logica predicatelor.

A4. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
A5. $B \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
A6. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$
A7. $A \Rightarrow (A \vee B)$
A8. $(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$
A9. $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)$
A10. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
A11. $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$.

Pentru că sensul operatorilor propoziționali este diferit, şi unele semne ale acestor operatori diferă.

Alte sisteme de logică intuiționistă s-au obținut, fie prin modificarea unora dintre axiomele sistemului de bază, fie din considerații de alt ordin. Menționez doar sistemul lui Johanson obținut prin eliminarea axiomei A11, aşa-numitul „calcul minimal" la care se mai adaugă sistemele fără negație construite de Griss şi Van Dantzig, sistemele cu negații speciale (Fevrier, Glimore, Lorenzen ş.a.)[1].

Dacă la sistemele propoziționale invocate se adaugă formulele predicative:

1) $\forall x\, F(x) \rightarrow F(y)$,
2) $F(y) \rightarrow \exists x\, F(x)$,

se obțin axiomatizări corespunzătoare pentru logica predicatelor. Pentru că aici intervin mai multe tipuri de variabile vor exista, corespunzător, mai multe reguli de deducție. Iată câteva din regulile de substituție:
1) Reguli de substituție pentru variabilele individuale libere,

[1] O prezentare detaliată a acestor sisteme poate fi găsită în cartea lui Alex. Surdu, *Elemente de logică intuiționistă* (Editura Academiei. Bucureşti 1976), singura lucrare de acest gen în literatura românească de specialitate.

2) Reguli de substituție pentru variabilele predicative,
3) Regula de redenumire (pentru variabilele legate),
4) Reguli cu privire la cuantori.

Demonstrația de consistență este foarte simplă şi constă în interpretarea formulelor predicative prin formule propoziționale.

De unde provine această interpretare?

Dacă se consideră că variabilele individuale iau valori într-un domeniu format dintr-un singur element a, atunci: $\forall x\ F(x)$, $\exists x\ F(x)$, $F(y)$ etc. se reduc, toate, la $F(a)$.

Notând pe $F(a)$ cu P, cele două axiome predicative de mai sus se reduc la $P \rightarrow P$, care este tautologie în logica propozițiilor.

Prin acelaşi procedeu, de la formula $\forall x\ F(x) \equiv \sim\exists x \sim F(x)$ se ajunge la $P \equiv \sim \sim P$ care, de asemenea, este o tautologie propozițională.

Pentru că există cel puțin o interpretare în care formulele sistemului se transformă în propoziții adevărate, sistemul este consistent.

Probleme speciale ridică totuşi completitudinea, pentru că în interpretarea descrisă apar formule adevărate ce nu pot fi demonstrate în sistem. Formula $\forall x\ F(x) \equiv \exists x\ F(x)$, de exemplu, nu face sistemul inconsistent, însă ea nu poate fi demonstrată în sistem ca teoremă.

În sens restrâns, aşadar, sistemul nu este complet deşi el este complet în sens larg (conform teoremei lui Gödel de completitudine, orice formulă adevărată este deductibilă în sistemul axiomatic al predicatelor).

Întrucât există cel puțin un sens în care sistemul nu este complet, el nu este nici decidabil. În capitolul următor voi relua problema decidabilității, deocamdată vreau să fac o scurtă trecere în revistă a unor concepte metalogice mai importante care presupun sistemul axiomatic. Este vorba de

conceptul de *consecinţă logică*, conceptul de *sistem deductiv* şi conceptul de *teorie formalizată*. Despre fiecare din aceste concepte voi face în continuare câteva precizări.

3. SISTEMUL AXIOMATIC ŞI CONCEPTUL DE CONSECINŢĂ LOGICĂ

Conceptul de consecinţă logică a fost introdus de Tarski şi poate fi definit atât sintactic cât şi semantic. Definiţia sintactică presupune sistemul axiomatic, iar cea semantică, conceptul de model. Pentru că problema modelelor semantice va fi discutată în cap. V, mă rezum aici la a spune că este model al unei formule X orice interpretare pentru care X este adevărată (sau care îl realizează pe X).

Fie A o mulţime de axiome logice şi R regulile de deducţie aferente lor. Sistemul $S = \{A, R\}$ este un sistem axiomatic oarecare. Relativ la o formulă M, sau grup de formule din S, conceptul de consecinţă, notat cu $Cn(M)$, se defineşte după cum urmează:

***Definiţia* 1**. Pentru orice formulă M (sau grup de formule), $Cn(M)$ este cea mai mică mulţime care conţine pe M, axiomele A, şi este închisă relativ la regulile de deducţie R (pentru cazul particular în care $M = \varnothing$, regulile de deducţie se aplică numai axiomelor A ceea ce ar însemna că $Cn(\varnothing) = S$.

***Definiţia* 2.** O formulă M este consecinţă logică în raport cu o clasă N de formule dacă orice model al clasei N este totodată un model al formulei M.

Tarski studiază proprietăţile conceptului sintactic de consecinţă logică în manieră axiomatică. El adoptă în acest sens următorul sistem de axiome:

Axioma 1. $S^* \leq \aleph_0$ (sistemul S este cel puțin numărabil).
Axioma 2. Dacă $A \subset S$, atunci $A \subset Cn(A) \subset S$.
Axioma 3. Dacă $A \subset S$, atunci $Cn(Cn\ A) = Cn(A)$.
Axioma 4. Dacă $A \subset S$, atunci $Cn(A) = \sum Cn\ (x_i)$ unde $x_i \subset A$.

Iată şi câteva dintre teoremele deduse de Tarski din aceste axiome:

Teorema 1. Dacă $A \subset B \subset S$, atunci $Cn(A) \subset Cn(B)$.
Teorema 2. Dacă $A + B \subset S$, atunci $Cn(A + B) = Cn(\mathrm{Cn}(A) + Cn(B))$.
Teorema 3. Dacă $A + B \subset S$, atunci $Cn(A + B)$ şi $Cn(A) \subset Cn(B)$ sunt echivalente.
Teorema 4. Dacă $A \subset S$ şi $C \subset Cn(A)$, atunci există o mulțime B astfel că $B \subset A$ şi $C \subset Cn\ (B)$.

Conceptul de consecință logică poate fi privit ca mulțime, ca operație, sau ca relație. În formalizarea lui Tarski $Cn(A)$ pare a indica o operație, însă sensul inițial este cel de mulțime (mulțimea consecințelor lui A). Foarte importantă este însă şi *relația* de consecință logică.

Pentru relația sintactică de consecință se foloseşte semnul „⊢", iar pentru cea sistematică semnul „⊨". Întrucât aceste semne mai pot însemna şi altceva redau mai jos câteva dintre principalele lor înțelesuri[1].

[1] Semnul „⊢" provine de la Frege (1879) însă sensul lui actual a fost introdus de Kleene (1934) şi Rosser (1935). Semnul „⊨" a fost introdus, se pare, tot de Kleene (1956).

$\vdash A$	„A este adevărată în sens sintactic“, „Există o demonstrație formală pentru A“ (sau „A este formal demonstrabilă“), „A este teoremă (sau teză)“
$\models A$	„A este adevărată în sens semantic“ „A este adevărată în orice interpretare“ „A este logic validă“
$\Gamma \vdash A$	„A este consecință în sens sintactic din Γ“ „A este deductibilă din Γ“ (cu sau fără precizarea axiomelor sau regulilor prin care se deduce A)
$\Gamma \models A$	„A este consecință în sens semantic din Γ“ „A este consecință validă din Γ“ „A este adevărată în orice interpretare în care este adevărată Γ“

Cele două relații pot fi generalizate pentru orice număr $m \geq 1$ de formule după cum urmează:

$\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m\} \vdash \{A\}$,
$\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m\} \models \{A\}$.

Iată şi o ilustrare foarte simplă a acestor relații de consecință logică:

$\{A \bullet B \rightarrow C, \sim C\} \vdash \{\sim A \vee \sim B\}$,
$\{A \bullet B \rightarrow C, \sim C\} \models \{\sim A \vee \sim B\}$.

Prima relație se poate demonstra foarte ușor cu ajutorul câtorva reguli ale calculului natural pe care le presupun cunoscute:

1. $(A \bullet B) \rightarrow C$	(Supoziție)
2. $\sim C$	(Supoziție)
3. $\sim(A \bullet B)$,	1, 2 × Mod. tolens,
4. $\sim A \vee \sim B$.	3, Rel. de Morgan

A doua relație se demonstrează prin tabele de adevăr. Pentru următoarele sisteme de valori ale variabilelor

$A = 1, B = 0, C = 0$
$A = 0, B = 1, C = 0,$

se verifică condiția impusă prin definiție consecinței valide:

$\{A \bullet B \rightarrow C, \sim C\} = 1$ și
$\{\sim A \vee \sim B\} = 1.$

Cu aceasta, consider conceptul de consecință logică suficient de precizat. Întrebarea care se pune mai departe este ce raporturi există între $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \models A$ și $\Gamma \rightarrow A$?

Aceste raporturi sunt fixate în logică cu ajutorul câtorva teoreme dintre care cea mai importantă este teorema deducției (Herbrand, 1930). Teorema se formulează în sens restrâns și în sens generalizat:

1) Dacă $\Gamma \vdash A$, atunci $\vdash \Gamma \rightarrow A$.
2) Dacă $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$, atunci $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{m-1} \vdash \Gamma_m \rightarrow A$.

O teoremă similară se demonstrează și cu privire la raportul dintre „$\models$“ și „ $\rightarrow$ “ :

3) $\Gamma \models A$ dacă şi numai dacă $\models \Gamma \rightarrow B$.
4) $\Gamma_1,..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$, dacă şi numai dacă $\Gamma_1,..., \Gamma_{m-1} \models \Gamma_m \rightarrow A$.
5) $\Gamma_1,..., \Gamma_{m-1}, \Gamma_m \vdash A$ dacă şi numai dacă $\models \Gamma_1 \rightarrow (...(\Gamma_{m-1} \rightarrow (\Gamma_m \rightarrow A))...)$.

4. SISTEMUL AXIOMATIC ŞI CONCEPTUL DE SISTEM DEDUCTIV

Fie *L* un limbaj formalizat şi *Cn* operaţia de consecinţă logică. Un sistem $S = \{L, Cn\}$ se va numi atunci *sistem deductiv*. Definit astfel, sistemul deductiv se pretează la o abordare pur algebrică.

Tarski va introduce un concept mai slab de sistem deductiv: „se numeşte sistem deductiv, sau sistem închis, sau pur şi simplu sistem, orice mulţime de propoziţii care conţine toate consecinţele sale“ (69; 79).

În loc de sistem deductiv întâlnim uneori noţiunea de „sistem de postulate“, ceea ce este cam acelaşi lucru.

Toate problemele discutate până acum pot fi transferate asupra sistemelor deductive (precizez că orice sistem axiomatic este un sistem deductiv, nu şi invers). O serie de teoreme cu privire la sistemele deductive sunt demonstrate de Tarski din axiomele deja menţionate.

5. SISTEMUL AXIOMATIC ŞI CONCEPTUL DE TEORIE FORMALIZATĂ

Fie din nou L un limbaj formalizat şi T o teorie oarecare formulată în *L*. Sistemul $T = \{L, Cn, A\}$ se numeşte *teorie formalizată* (a nu se confunda mulţimea axiomelor *A*, care aparţin teoriei, cu mulţimea axiomelor logice presupuse de operaţia de consecinţă logică Cn).

Sistemul deductiv $S = \{L, Cn\}$ se mai numeşte şi „logica lui T". Din această cauză, teoria T mai poate fi dată şi în forma $T = \{S, A\}$ (A este aceeaşi mulţime de axiome). Dacă $A = \varnothing$, atunci $S = T = \{L, Cn, \varnothing\}$.

Conceptul de teorie formalizată poate fi aplicat atât în logică, cât şi în matematică. Şi într-un caz şi în celălalt putem alege ca axiome în S axiomele unui sistem neclasic. Mulţimea $Cn(A)$, sistemul deductiv S şi teoria formalizată T se vor modifica, şi ele, în mod corespunzător.

Diferitele teorii din matematica intuiţionistă pot fi privite ca alternative la matematica clasică. Aceste teorii sunt obţinute tocmai prin modificarea structurii lor logice.

Pentru ilustrarea conceptului de teorie formalizată în logică voi reproduce în cele ce urmează formalizarea dată de J. Lukasiewicz silogisticii aristotelice. Teoria a fost expusă în cartea sa *Aristotele's Sillogistic from the standpoint of modern formal logic* (Oxford, 1957).

Am optat pentru acest exemplu din mai multe motive. Întâi, pentru că avem ocazia să ne facem o idee mai clară despre limbajul Lukasiewicz pe care l-am discutat în primul capitol, limbaj pe care nu l-am folosit niciodată până acum. Apoi, teoria lui Lukasiewicz permite o ilustrare clară şi elegantă a principalelor predicate metateoretice invocate în prima parte a acestui capitol. În sfârşit, apar aici câteva aspecte noi, de natură să întregească imaginea de ansamblu asupra metodei axiomatice.

Expunerea se va face respectând strict structura teoriei formalizate – limbaj formalizat, sistem deductiv, axiomele teoriei. Cum este şi firesc, voi începe cu expunerea limbajului.

***Lista de simboluri*:**

1) p, q, r,... variabile propoziţionale,
2) x, y, z,... variabile pentru termeni,
3) N, K, C,... operatorii propoziţionali „non", „şi", „implică".

4) A, E, I, O operatori silogistici „toți ... sunt ...", „nici un ... nu este ...", „unii ... sunt ...", „unii ... nu sunt ..." .

***Reguli de formare*:**
Noțiunea de *expresie* (*formulă*) este definită inductiv prin regulile:
R1. p, q, r,... şi Axy, Exy, Ixy, Oxy sunt expresii,
R2. Dacă α şi β sunt expresii atunci Nα, K$\alpha\beta$, C$\alpha\beta$, E$\alpha\beta$ vor fi de asemenea expresii.

Observație. Lukasiewicz definește silogistica aristotelică drept teoria operațiilor A, E, I, O în domeniul termenilor generali nevizi. Orice modificare în raport cu termenii sau cu cele patru operații introduse iese din cadrele silogisticii aristotelice.

***Sistemul deductiv*:**
Deducția teoremelor (care nu sunt altceva decât modurile silogistice valide) se face cu ajutorul celor 14 tautologii propoziționale date mai jos şi a regulilor de deducție aferente lor.

I. Cp Cqp
II. CCqr CCpq Cpr
III. CCp Cqr Cq Cpr
IV. Cp CNppp
V. CC Nppp
VI. CCpq CNq Np
VII. CCKpqr Cp Cqr
VIII. Cp CCKpqr Cqr
IX. CCsp CCKpqr CKsqr
X. CCKpqr CCsq CKpsr
XI. CCrs CCKpqr CKp CKqps
XII. CCKpqr CKp Nr Nq
XIII. CCKpqr CKNrq Np
XIV. CCKp Nq Nr CKprq.

Axiomele teoriei[1]**:**

1) Axx
2) Ixx
3) CKAyzAxyAxz (Barbara)
4) CKAyzIyxIxz (Datisi)

Definiții:

D1. $Exy =_{df} NIxy$
D2. $Oxy =_{df} NAxy$

Reguli de deducție:

RS. (regula substituției): dacă α este teoremă, orice substituție a variabilelor din α cu variabile de același tip va conduce tot la o teoremă (condiția este ca substituția să se facă peste tot la fel). Substituția lui p cu q (respectiv, a lui x cu y) se va nota „p / q" (respectiv „x / y") indicându-se de fiecare dată axioma sau teorema în care se face substituția.

RD. (regula detașării): dacă α și $C\alpha\beta$ sunt teoreme, atunci β este teoremă (în demonstrații aplicarea acestei reguli se marchează cu „C" precedat de semnul „ ×".

RE. Secvența de simboluri NI se poate înlocui peste tot cu E, și invers.

RD: Secvența NA se poate substitui peste tot cu O, și invers.

[1] În legătură cu axioma 2), dl. Ioan Rusu din București mi-a atras atenția asupra faptului că, transcrisă în limbajul logicii predicatelor, axioma nu mai este lege logică. Observația este interesantă și îndeamnă la regândirea anumitor teme privind limbajul teoriilor. După părerea mea, axioma 2) este un postulat de existență (deci o propoziție factuală) prin care se asigură neviditatea termenilor. Așa cum am mai spus, Lukasiewicz definește silogistica aristotelică drept teoria relațiilor *a*, *e*, *i*, *o* în domeniul termenilor generali nevizi.

***Deducţia teoremelor*:**

VII. p/Ayx, q/Iyx, r/Ixz. X C4-5
5. CAyz CIyz Ixz
6. y/x, z/x, x/y. X C1-6
6. C/xy Iyx (conversiunea propoziţiei I)
III. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz X C5-7
7. CIyx CAyz Ixz
7. y/z, z/y X C2-8
8. CAxy Ixy (subalternarea propoziţiei A)
II. q/Ixy, r/Iyx X C6-9
9. CCp Ixy Cp Iyx
9. p/Axy X C8-10
10. CAxy Ixy (conversiune per accidens)
6.x/y, y/x. -11
11. CIyx Ixy
VI. p/Iyx, q/Ixy. X C11-12
12. CNIxy NIyx
12. RE-13
13. CExy Eyx (conversiunea propoziţiei E)
VI. p/Axy, q/Ixy. X C8-14
14. CNIxy NAxy
14. RE, RO-15
15. CExy Oxy (subalternarea propoziţiei E)
X. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz. X C4-16
16. CCs Iyx CKAyzs/xz
16. s/Ixy. X C6-17
17. CKAyz Ixy Ixz (Darii)
16. s/Axy. X C10-18
18. CKAyz Axy Ixz (Barbarii)
8. x/y, y/x. -19
19. CAyx/yx
16. s/Ayx. X C 19-20

20. CKAyz Ayx Ixz (Darapti)
XI. r/Iyx, s/Ixy. X C11 - 21
21. CCKpq Iyx CKqp Ixy
4. z/x, x/z -22
22. CKAyx Iyz Izx
21. p/Ayx, q/Iyz, y/z. X C22-23
23. CKIyz Ayx Ixz (Disamis)
17. z/x, x/z. -24
24. CKAyx Izy Izx
21. p/Ayx, q/Izy, y/z. X C24-25
25. CKIzy Ayx Ixy (Dimaris)
18. z/x, x/z. -26
26. CKAyx Azy Izy
21. p/Ayx, q/Azy, y/z. X C26-27
27. CKAzy Ayx Ixz (Bramantip)
XIII. p/Iyz, q/Ayx, r/Ixz. X C23-28
28. CKNIxz Ayx NIyz
28. RE-29
29. CKExz Ayx Eyz
29. x/y, y/x -30.
30. CKE yz Axy Exz (Celarent)
IX. s/Exy, p/Eyx. X C13-31
31. CCKEyxqr CKExyqr
31. x/z, q/Axy, r/Exz. X C30-32
32.CKEzy Axy Exz (Cesare)
XI. r/Exy, s/Eyx. X C13-33
33. CCKpq Exy CKqp Eyx
32. z/x, x/z. -34
34. CKExy Azy Ezx
33. p/Exy, q/Azy, x/z, y/z. X C34-35
35. CKA zy Exy Exz (Camestres)
30. z/x, x/z -36
36. CKEyx Azy Ezx

33. p/Eyx, q/Azy, x/z, y/z. X C36-37
37. CKAzy Eyx Exz (Camenes)
II. q/Exy, r/Oxy. X C15-38.
38. CCp Exy Cp Oxy.
38. p/KEyz Axy, y/z. X C30-39
39. CKEyz Axy Oxz
38. p/KEzy Axy, y/z. X C32-40
40. CKEzy Axy Oxy (Cesaro)
38. p/KAzy Exy, y/z. X C35-41
41. CKAzy Exy Oxy (Camestrop)
38. p/KAzy Eyx, y/z. X C37-42
42. CKAzy Eyx Oxz (Camenop)
XIII. p/Ayz, q/Iyx, r/Ixz. X C4-43
43. CKNIxz Iyx NAyz.
43. RE, RO. -44
44. CKExz Iyx Oyz
44. x/y, y/x. -45
45. CKEyz Ixy Oxz (Ferio)
31. x/z, q/Ixy, r/Oxz. X C45-46
46. CKEzx Ixy Oxy (Festino)
X. p/Eyz, q/Ixy, r/Oxz. X C45-47
47. CCs/xy CKEyzs Oxz.
47. s/Iyx. X C11-48
48. CKEyz Iyx Oxz. (Ferison)
31. x/z, q/Iyx, r/Oxz. X C48-49
49. CKEzy Iyx Oxz (Fresison)
50. x/y, y/x. -50
50. CAyx Ixy
47. s/Ayx. X 50-51
51. CKEyz Ayx Oxz (Felapton)
31. x/z, q/Ayx, r/Oxz. X C51-52
52. CKEzy Ayx Oxz (Fesapo)
XII. p/Ayz, q/Axy, r/Axz. X C3-53

53. CKAyz Oxz Oxy
53. RO-54
54. CKAyz Oxz Oxy
54. y/z, z/y. -55
55. CKAzy Oxy Oxz (Baroco)
XIII. p/Ayz, q/Axy, r/Axz. X C3-56
56. CKNAxz Axy NAyz
56. RO-57
57. CKOxz Axy Oyz
57. x/y, y/x . -58
58. CKOyz Ayx Oxz. (Bocardo)

Există câteva deosebiri mai importante între silogistica lui Aristotel şi formalizarea expusă aici după Lukasiewicz. În primul rând, Aristotel nu dispune de o teorie generală a deducţiei, care, în cazul de faţă este calculul propoziţional bivalent. Demonstrarea validităţii modurilor silogistice se face prin reducerea acestora la modurile figurii I considerate de el moduri perfecte. Dintre acestea, fundamentale sunt modurile *Barbara* şi *Celarent*. Modul *Baroco* (fig. II) şi *Bocardo* (fig. III) nu se demonstrează direct din modurile figurii I, ci indirect, prin reducere la absurd. În ambele cazuri, *a reduce* înseamnă a arăta dependenţele deductive ale modurilor respective faţă de modurile figurii I, în special faţă de *Barbara* şi *Celarent*.

Or, trebuie spus că în axiomatizarea lui Lukasiewicz lucrurile stau exact invers. *Baroco* şi *Bocardo* nu numai că se deduc din *Barbara*, dar sunt singurele moduri deduse astfel. Curios este că până şi *Barbari*, subalternul lui *Barbara*, poate fi dedus în mod independent. Cel puţin din acest punct de vedere, noţiunea aristotelică de mod perfect cred că ar trebui revizuită.

Din totalul de 256 de moduri posibile, în silogistica aristotelică sunt valide doar 24 (am inclus aici şi modurile subalterne).

Pentru a respinge ca nevalide restul de 232 de moduri silogistice, Lukasiewicz va adăuga două axiome speciale, numite de el *axiome de respingere,* cărora le asociază două reguli de respingere:

***Axiome de respingere*:**
R1) CKAzy Axy Ixz
R2) CKExy Exy Ixz.

***Reguli de respingere*:**
RS. Regulă de respingere prin substituţie: dacă β se obţine din α prin substituţie şi α este respinsă, atunci şi β va fi respinsă.
RT. Regula de respingere prin detaşare: dacă Cαβ este asertată şi β este respinsă, atunci şi α este respinsă.

Noţiunea de „respingere" devine astfel corelatul noţiunii de „asertare" pe care am simbolizat-o cu „⊢". Este prima axiomatizare în care sunt deduse concomitent formule asertate (teoreme) şi formule respinse (nonteoreme).

Următoarele formule pe care le reproduc fără demonstraţie sunt exemple de formule respinse:

3) Ixz
4) CExz Ixz
5) CKAzz Exz Ixy
6) CKAyz Exy Ixz
7) CKAzy Exy Axz
8) CKAzy Exz Oxy
9) CKAyz Exy Oxz
10) CKAyz Exy Exz .

Pentru a demonstra că sistemul este consistent, se interpretează variabilele pentru termeni prin variabile propoziţio-

nale, iar expresiile Axy, Ixy se interpretează prin KCxxCyy. Mai exact, dacă Axy = Ixy = KcxxCyy, atunci toate axiomele şi teoremele devin tautologii propoziţionale.

Tot prin metoda interpretării se demonstrează că sistemul este independent.

a) ***Independenţa axiomei* 1**: dacă A = K şi C = I, axiomele 2, 3 şi 4 vor fi verificate (adevărate), în schimb, axioma 1 nu este verificată: Aoo = Koo = 0 pentru x = 0.

b) ***Independenţa axiomei* 2**: dacă A = C şi I = K, vor fi verificate axiomele 1, 3, 4 nu şi axioma 2 (Ioo = Koo = 0 pentru x = 0).

c) ***Independenţa axiomei* 3**. Se interpretează operatorii N, K, C în mulţimea {0,1,2}, astfel:

p	Np
0	1
1	0
2	0

K	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	1

C	0	1	2
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	1

Axiomele 1, 2, 4 sunt verificate, în schimb, axioma 3 nu este verificată. Pentru $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ se obţine:
CK12 A01 A02 = CK110 = C10 = 0.
d) *Independenţa axiomei* 4: dacă A = I = C, axiomele 1, 2, 3 sunt verificate iar axioma 4 neverificată (pentru x = 1, y = 0, z = 0 se obţine CKAyz Iyz Ixz = CKCyz Cyz Cxz = 0).

Completitudinea ridică însă probleme. O serie de formule nu sunt demonstrabile din axiomele teoriei, deşi ele sunt adevărate în interpretarea dată pentru consistenţă (incompletitudine în sens restrâns). În mod special atrag atenţia formulele:

1) CIxy CNAxy Ayx
2) CCNAxy Ayx Ixy

care legitimează echivalența:

3) Ixy = CNAxy Ayx.

Dacă transcriem implicația din membrul drept al echivalenței prin disjuncție și negație, vom obține următorul rezultat: „Unii *x* sunt *y*" este echivalent cu „Toți *x* sunt *y* sau toți *y* sunt *x*". Or, este de departe vizibil că această propoziție nu mai este adevărată.

Să înțelegem de aici că sistemul este consistent în unele interpretări și inconsistent în altele?

Pentru a rezolva această problemă voi anticipa puțin lucrurile și voi aduce în discuție conceptul semantic de *model*. Definițiile care urmează sunt reformulate după Wang Hao (75; 22).

***Definiția* 1**. Un sistem de axiome este consistent dacă există un model pentru expresiile sistemului (reamintesc că prin *model* se înțelege acea interpretare pentru care axiomele sistemului devin propoziții adevărate).

***Definiția* 2**. Două modele ale unui sistem *S* sunt izomorfe dacă între elementele lor există o corespondență biunivocă, astfel că, orice formulă din *S* este adevărată într-unul dintre modele dacă și numai dacă ea este adevărată și în celălalt model.

***Definiția* 3**. Dacă fiecare pereche de modele ale unui sistem axiomatic *S* sunt izomorfe între ele, sistemul este *categoric*.

Cu aceste precizări revenim la problema completitudinii. Dat fiind că axiomatizarea în discuție nu este completă, există cel puțin o formulă *A* astfel că *A* nu poarte fi demonstrată ca teoremă. În plus, *A* este adevărată în unele modele și falsă în altele, iar aceste modele nu pot fi izomorfe. Nefiind izomorfe, sistemul nu este categoric (printr-o teoremă specială se de-

monstrează că orice sistem categoric este totodată şi un sistem complet).

Odată stabilit că sistemul nu este complet, se pune problema dacă această incompletitudine este una de principiu sau dacă nu cumva ea este rezultatul unui viciu de construcţie?

Cu alte cuvinte, poate fi perfecţionată această axiomatizare în aşa fel încât ea să devină completă?

J. Slupecki va demonstra că sistemul poate deveni complet dacă se adaugă o regulă specială de respingere.

Regula lui Slupecki se enunţă în felul următor: dacă α şi β sunt expresii simple negative iar γ este o expresie elementară, atunci, dacă $C\alpha\gamma$ şi $C\beta\gamma$ sunt expresii respinse, $C\alpha C\beta\gamma$ va fi de asemenea respinsă.

Expresiile simple sunt expresiile Axy, Ixy, Exy, Oxy dintre care primele două sunt simplu pozitive, iar ultimele două, simplu negative.

Expresie elementară este atunci orice expresie simplă şi orice expresie de tipul $C\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3...\ C\alpha_{n-1}C\alpha_n$ unde α_i este o expresie simplă.

Analogia cu legea silogistică potrivit căreia din două premise negative nu rezultă nici o concluzie este evidentă. De precizat că adăugându-se această nouă regulă de respingere, sistemul devine complet[1].

6. CONCLUZII

Importanţa unei metode este apreciată după importanţa problemelor pe care ea le rezolvă. Atât în logică, cât şi în matematică problemele rezolvate axiomatic sunt fundamentale.

[1] Pentru detalii suplimentare privind axiomatizarea silogisticii, vezi şi cartea lui S. Vieru *Axiomatizări şi modele ale sistemelor silogistice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1975.

Să nu uităm că începuturile logicii moderne sunt legate nu doar de aplicarea limbajelor simbolice ci şi a metodei axiomatice. Chiar dacă din punct de vedere metodologic logica arată astăzi cu totul altfel, metoda axiomatică rămâne totuşi una din metodele ei de bază.

În încheierea acestui capitol, voi puncta, pe scurt, câteva dintre problemele mai importante ale logicii care sunt rezolvabile axiomatic.

1) *Problema deciziei.* Există în momentul de faţă un sens axiomatic al termenului decizie, după cum există unul algoritmic. Pentru că voi relua această problemă în capitolul următor, mă rezum aici la a spune că *a decide* din punctul de vedere axiomatic înseamnă a stabili pentru orice formulă dată dacă este sau nu teză logică. După cum s-a văzut, există sisteme în care sunt demonstrabile toate formulele valide şi sunt respinse toate formulele nevalide. Despre un astfel de sistem spunem că este *decidabil.*

Se înţelege că nu toate sistemele sunt decidabile pentru că nu toate sunt complete. Conform teoremei lui Gödel de incompletitudine, o serie de sisteme sunt principial incomplete şi deci indecidabile. O astfel de incompletitudine ridică nu doar probleme logice, ci şi filozofice, cum este problema raportului dintre adevăr şi demonstrabilitate. Am discutat în *Introducere* câteva din consecinţele teoremei lui Gödel asupra programului logicist de fundamentare a matematicii, program despre care am spus că poate fi privit şi ca un program filozofic.

2) *Probleme legate de definire.* Sistemul axiomatic poate servi ca mijloc de definire şi chiar de construcţie. Un concept intuitiv, dar imprecis, cum este cel de mulţime, se defineşte axiomatic (este mulţime doar ceea ce satisface axiomele date şi propoziţiile deduse din aceste axiome).

Ceva asemănător se poate spune şi în geometrie despre conceptul de spaţiu. Orice modificare consistentă a axiomelor

se răsfrânge mai mult sau mai puţin esenţial asupra obiectului definit. Unele axiome se dovedesc a avea din acest punct de vedere un rol hotărâtor. Modificarea axiomei V a paralelelor a dus la un alt concept de spaţiu despre care putem spune că este definit (şi chiar construit) axiomatic. Logica intuiţionistă va produce un efect similar asupra conceptelor de adevăr şi de lege logică.

3) *Problema paradoxelor.* În sensul său cel mai general, paradoxul înseamnă contradicţia între două propoziţii *A* şi *~A*, astfel că, din supoziţia lui *A* rezultă *~A* şi din supoziţia lui *~A* rezultă *A*. Paradoxul lui Cantor, paradoxul lui Russell, Berry, Richard, Grelling, sunt doar câteva din paradoxele care au marcat criza matematicii de la începutul secolului XX.

În textele reproduse după P. S. Novicov am văzut ce consecinţe are o contradicţie asupra unei teorii, fie ea din matematică, fie din logică. Cu toate acestea, s-a întâmplat un lucru surprinzător. Nici una din teoriile invocate nu a fost pusă în pericol prin efectul de paradox încât cine nu a vrut să ia în serios acest pericol nu a întâmpinat, practic, nici o dificultate. Va trebui deci să distingem între contradicţia paradoxală şi contradicţia simplă, trivială. Numai contradicţia simplă se propagă în tot corpul teoriei, contradicţia paradoxală are un efect limitat. În ultima vreme aceste probleme fac obiectul unei noi direcţii în cercetarea logică – logica paraconsistentă (Newton da Costa).

4) *Probleme de organizare.* Sistemul axiomatic este forma cea mai tare de organizare deductivă a unei teorii. Organizarea axiomatică are la bază criterii de eficienţă şi nu doar criterii de ordin estetic, cum s-a mai spus uneori. Una este să stabileşti adevărul unei propoziţii în mod empiric, inductiv, şi alta demonstrativ. Apoi, demonstraţia axiomatică are acces la adevăruri pe care altfel nu le-am putea dobândi. Cu toate acestea, în ştiinţele factuale nu avem de-a face cu

metoda axiomatică, cel puțin nu în forma pe care am descris-o aici. Este drept că şi în ştiințele factuale intervin principii şi că aceste principii nu se demonstrează, ele sunt confirmate de faptele ce cad în sfera de interes a teoriei respective (cu ajutorul principiilor se demonstrează legile).

Trebuie spus că în logica modernă intervine atât ideea de axiomă cât şi cea de lege şi principiu însă trebuie lămurit care este raportul dintre lege şi principiu aici.

5) *Probleme cu caracter metalogic.* Am examinat în acest capitol câteva dintre conceptele metalogice care se definesc cu ajutorul sistemului axiomatic. Conceptul de teorie formalizată, reprodus după Rasiowa Sikorski (61), viza teoriile matematice, însă, după părerea mea, el poate fi foarte bine adaptat şi la logică. Că unele din aceste concepte se pot studia şi din punct de vedere matematic este foarte adevărat, însă nu trebuie uitat că principala lor destinație o constituie rezolvarea de probleme logice.

IV. ALGORITMII ŞI LOGICA

O serie de probleme logice, atât cu caracter semantic, cât şi sintactic, îşi găsesc rezolvarea pe cale algoritmică, prin calcul. Aceasta a şi făcut ca printre denumirile mai vechi ale logicii matematice să figureze şi denumirea de „logică algoritmică", iar unele dintre teoriile ei de bază să fie numite drept „calcule".

Pe lângă sensul algoritmic al termenului „calcul" există la ora actuală şi sensuri nealgoritmice, cum ar fi „calculul axiomatic", de exemplu, sau „calculul natural". „Vom utiliza mereu ca sinonime, precizează P.S. Novicov, termenii formalism şi calcul" (55; 26).

În orice calcul, fie el matematic sau logic, dispunem de anumite reguli care prescriu modul de realizare al unor operaţii. Sunt reguli care aplicate într-o anumită ordine conduc în mod univoc la un anumit rezultat.

Împreună, regulile de calcul şi ordinea aplicării lor formează algoritmul.

Datele ce urmează a fi prelucrate algoritmic nu sunt date la întâmplare, ele apar în enunţul anumitor probleme. De fapt, ceea ce se rezolvă algoritmic sunt problemele şi orice algoritm concret este definit în raport cu o categorie sau clasă de probleme. Din aceste motive voi începe prezentarea cu câteva aspecte generale legate de conceptul de problemă încercând să surprind totodată şi unele aspecte de ordin logic care intervin aici.

1. CONCEPTUL DE PROBLEMĂ

În primul rând, este important să cunoaştem când un sistem de date se constituie într-o problemă.

Un răspuns la această întrebare îl găsim în cartea lui Gh. Enescu *Fundamentele logice ale gândirii*: „Vom spune că avem o problemă dacă: 1) dispunem de o mulţime (finită) de informaţii numite *date*, 2) *se cere* să aflăm pe baza datelor alte informaţii numite *soluţia problemei*" (21; 277).

Aşadar, o problemă se compune, într-o accepţiune foarte largă, desigur, din ceea ce „se dă" şi ceea ce „se cere", cu precizarea că ceea ce se cere este întotdeauna în funcţie de ceea ce se dă.

Relativ la orice problemă autorul distinge între *metoda de rezolvare* (care poate fi dată sub formă de algoritm) şi *rezolvarea efectivă* sau *procesul de rezolvare* care constă în aplicarea metodei la condiţiile determinate ale problemei.

Dacă problema de care ne ocupăm are un caracter individual pronunţat, în sensul că ea prezintă un coeficient sporit de dificultate, atunci ceea ce prezintă interes este rezolvarea propriu-zisă şi, ca atare, soluţia problemei. Dacă se constată, în schimb, că problema face parte dintr-o clasă de probleme de acelaşi tip, atunci de interes devine metoda de rezolvare, metodă ce poate fi studiată mai departe separat. Foarte multe situaţii din istoria matematicii (şi nu numai) pot fi asimilate acestei scheme.

Pentru ca o problemă să poată fi rezolvată algoritmic este necesar ca sistemul de date prin care ea se formulează ea să satisfacă anumite condiţii. Gh. Enescu a transferat asupra problemei unele din proprietăţile sistemului axiomatic.

Astfel, datele trebuie să fie în primul rând necontradictorii. Este de presupus că dacă această cerinţă nu este satisfăcută, algoritmul conduce la rezultate întâmplătoare, sau nu con-

duce practic la nici un rezultat. Este vizibilă aici analogia cu principiul implicativ „din contradicție rezultă orice".

În al doilea rând, datele trebuie să fie independente, ceea ce corespunde caracterului lor necesar și neredundant. Dacă această condiție nu este satisfăcută s-ar putea să avem nu una ci mai multe probleme (în cel mai bun caz).

În sfârșit, datele trebuie să fie complete, în sensul de suficiente. Această condiție se îndepărtează întrucâtva de semnificația sa axiomatică.

Ne dăm seama că, deși „împrumutate", aceste condiții sunt totuși esențiale pentru aplicarea algoritmului. La rândul său, sistemul axiomatic a fost asociat cu ideea de calcul, însă, după cum vom vedea, între cele două există deosebiri esențiale.

Studiul logic al problemelor impune clasificarea acestora după câteva criterii mari, cum ar fi forma problemei, tipul de răspuns, modul de rezolvare, caracterul ei reductibil sau nereductibil și multe altele. Mă voi opri pe scurt la câteva dintre ele.

După cum arată Kleene (41), o problemă poate fi dată în formă interogativă sau nu. Cele mai multe probleme în formă interogativă sunt de tipul „care?" („care este soluția ecuației X?", „care este valoarea expresiei Y?", „care este forma normală disjunctivă a formulei Z?" ș.a.

După cum se observă, acest tip de problemă caracterizează atât logica cât și matematica.

Intervin însă de multe ori și probleme în formă interogativă de tipul „cât?", „cum?", „există?" ș.a. Iată și câteva exemple: „cât este *sin* x?", „cum este funcția f ?", „există o soluție reală pentru ecuația E?".

Acest „există" din enunțul ultimei probleme nu este lipsit, la rândul lui, de probleme. În matematica intuiționistă, de exemplu, ceva există în măsura în care el poate fi construit, dat efectiv. Se înțelege deci că rezolvarea algoritmică satisface în cel mai înalt

grad exigenţele intuiţioniste relativ la problema existenţei. De altfel, A. A. Markov – iniţiatorul constructivismului matematic – recunoaşte deschis că „dezvoltarea direcţiei constructiviste s-a produs pe baza precizării, realizate în anii 30, a noţiunii de algoritm care a epurat această noţiune de neclarităţi şi subiectivism" (50; 370). Or, în matematica clasică intervin adeseori situaţii în care un procedeu doar indică existenţa unui obiect, fără să-l poată efectiv construi. Acesta este şi cazul aşa-numitului „raţionament diagonal" imaginat de G. Cantor (V. cap. VI).

În sfârşit, o serie de probleme matematice se prezintă în formă funcţională. A rezolva problema înseamnă aici a calcula (sau, mai general, a găsi) valoarea funcţiei pentru anumite valori ale argumentelor. Noţiunea de calculabilitate este strâns legată de noţiunea de *recursie*.

Am spus mai sus că problemele se clasifică şi după tipul de răspuns pe care îl implică. O importantă categorie de probleme sunt cele la care se poate răspunde prin „da" sau „nu", numite de aceea şi probleme de tipul „da – nu". Răspunsul prin „da" ar putea fi asociat predicatului logic „adevărat", iar răspunsul prin „nu", predicatului „fals". Să urmărim exemplele de mai jos:

„Are funcţia *f* valori în intervalul $(-\infty, 2]$?".
„Este adevărat că funcţia *f* are valori în $(-\infty, 2]$?".

Răspunsurile „da – nu" pot fi considerate semnificaţii semantice, asemenea semnificaţiilor „adevăr – fals", pentru acele probleme care se compun din alte probleme. Am în vederi compuneri în genul celor realizate prin operatorii propoziţionali „non", „şi", „sau" etc.

Răspunsul la o problemă compusă este în funcţie atunci de răspunsul la problemele ei componente. Mă voi rezuma doar la două exemple simple date de operatorul negaţiei şi conjuncţiei:

A	~A
Da	Nu
Nu	Da

A• B	Da	Nu
Da	Da	Nu
Nu	Nu	Nu

Caracteristic acestor probleme este faptul că sunt subsumate terţului exclus, însă, la fel ca în logica propoziţiilor, pot interveni şi probleme care să se sustragă terţului exclus, în sensul că ele nu se mai asociază unui răspuns prin „da" sau „nu", ci necesită nuanţări. Problema lui Fermat, dacă există patru numere naturale *x*, *y*, *z*, *n* astfel că $x^n + y^n = z^n$, $(n > 2)$, era până nu de mult o problemă tipică în acest sens. Astfel de probleme ne obligă să luăm în considerare nu doar valoarea, ci şi limitele metodei algoritmice[1].

Organizarea logică a problemelor a fost dusă până la capăt de A. N. Kolmogorov care a imaginat un fel de *calcul* sau de *logică a problemelor*, după modelul calculului propoziţional. „Paralel cu logica teoretică, scrie Kolmogorov, care sistematizează schemele de demonstrare a adevărurilor teoretice, se mai pot sistematiza soluţiile problemelor, de exemplu ale problemelor de construcţie geometrică. Principiului silogismului îi corespunde aici, de exemplu, următorul principiu: dacă putem reduce soluţia lui *b* la soluţia lui *a* şi soluţia lui *c* la soluţia lui *b*, atunci putem reduce soluţia lui *c* la soluţia lui *a* (...). Astfel, se obţine pe lângă logica teoretică un nou *calcul*, al problemelor" (44; 359).

Faptul că problemele se pot compune între ele cu ajutorul cuvintelor de legătură este fără îndoială important sub aspect logic, însă rezultatul lui Kolmogorov are o semnificaţie mult mai profundă. Din punct de vedere formal, calculul lui Kolomogorov este izomorf calculului propoziţional intuiţionist (varianta lui Heyting).

[1] La data primei ediţii a acestei cărţi, Teorema lui Fermat nu era demonstrată.

Dar dacă problemele aparţin matematicii, iar organizarea logică a acestor probleme corespunde logicii intuiţioniste, urmează de aici neapărat că logica intuiţionistă este o logică specifică gândirii matematice?

Voi răspunde acestei întrebări în finalul lucrării după ce vor fi examinate şi alte aspecte legate de aplicarea algoritmilor în logică, deocamdată reţinem că logica contribuie din plin la precizarea conceptului de problemă, fapt ce a dus la o nouă dezvoltare a logicii – *logica interogativă.*

2. CONCEPTUL DE ALGORITM

Să considerăm următoarea problemă: fiind date numerele 244 şi 86 să se găsească cel mai mare divizor comun.

Evident, problema are toate particularităţile pe care le-am discutat mai sus putând fi soluţionată algoritmic. Algoritmul de rezolvare a acestui gen de probleme, cunoscut şi sub numele de „algoritmul lui Euclid", se compune din următoarele reguli sau instrucţiuni:

1) Se ordonează cele două numere conform relaţiei „>" (mai mare).

2) Se împarte numărul mai mare prin numărul mai mic. Dacă restul împărţirii este zero algoritmul se opreşte, iar numărul mai mic este rezultatul căutat. Dacă restul este diferit de zero, algoritmul se continuă prin regula:

3) Se împarte împărţitorul la rest până se ajunge la o împărţire în care restul este zero. Ultimul rest diferit de zero este rezultatul căutat.

Aplicarea concretă a algoritmului la numerele 244 şi 86 arată astfel:

244 : 86 = 2 rest 72
86 : 72 = 1 rest 14
72 : 14 = 5 rest 2
14 : 2 = 7 rest 0.

Conform regulii 3), cel mai mare divizor comun al celor două numere este 2.

Desigur, algoritmul poate fi descris într-o formă pur matematică, însă acest lucru, pentru moment, este mai puţin important. Ceea ce interesează deocamdată este că exemplul reprodus permite evidenţierea câtorva caracteristici generale ale algoritmului valabile atât pentru matematică, cât şi pentru logică. De fapt, logica nu aplică decât cu foarte puţine excepţii algoritmi din matematică, însă unele dintre procedeele şi metodele ei de rezolvare prezintă aceleaşi caracteristici cu algoritmii din matematică. Vom spune atunci că un algoritm, fie el matematic, fie logic are:

1) *Caracter discret.* Algoritmul se desfăşoară sub forma unei succesiuni de operaţii distincte prescrise prin reguli de asemenea distincte. Ordinea operaţilor într-un algoritm este riguros determinată.

2) *Caracter finit.* Numărul operaţiilor prin care se realizează algoritmul este întotdeauna finit deşi el poate fi uneori foarte mare (tehnicile moderne de calcul au făcut ca această particularitate a algoritmului să arate astăzi cu totul altfel).

3) *Caracter determinat.* În fiecare etapă a aplicării algoritmului, datele obţinute sunt univoc determinate în raport cu datele anterioare. Această „determinare" poate fi văzută şi în raport cu problemele ce urmează a fi rezolvate pentru că fiecare algoritm este destinat unei clase determinate de probleme şi nu rezolvării de probleme în general.

4) *Caracter de masă.* Algoritmul se aplică unei clase potenţial infinite (deşi determinate) de probleme. Există, de exemplu, o mulţime potenţial infinită de probleme de tip „*a* divide *b*".

5) *Caracter formal.* Într-un algoritm importantă este corelarea formală a datelor, nu şi conţinutul lor propriu-zis.

6) *Caracterul mecanic.* Aplicarea regulilor şi implicit efectuarea operaţiilor în algoritm sunt întotdeauna la fel, ceea ce diferă este

doar numărul operaţiilor, care nu poate fi cunoscut dinainte şi care depinde de problema ce urmează a fi rezolvată. Această particularitate explică posibilitatea realizării algoritmului cu ajutorul maşinii în baza operaţiei de programare (în principiu, orice problemă rezolvabilă algoritmic este programabilă).

Ne putem întreba acum dacă aceste proprietăţi ale algoritmului sunt valabile şi pentru deducţia axiomatică?

Cred că nu este cazul să mai insist că cel puţin unele dintre aceste proprietăţi sunt cu totul străine metodei axiomatice.

S-ar putea spune, de exemplu, că deducţia axiomatică are caracter mecanic? Sau de masă?

Probabil că denumirea de „calcul axiomatic" se datorează faptului că şi în deducţia matematică intervin reguli, deşi teoremele se deduc, nu se calculează.

Cu toate înrudirile lor, cele două operaţii sunt totuşi destul de diferite.

Trebuie spus că până în deceniul trei al secolului XX nu a existat un concept general de algoritm, ci numai algoritmi concreţi definiţi în raport cu diferite categorii de probleme din matematică. Interes special prezentau algoritmii în care operaţiile puteau fi reduse după un număr finit de paşi la operaţiile de bază ale aritmeticii.

Începând cu anul 1930, o serie de autori (E. Post, A. Markov, A. Church, A. Turing ş.a.) au elaborat conceptul general de algoritm contribuind astfel din diferite puncte de vedere la precizarea noţiunii intuitive de algoritm. În esenţă, aceste definiţii s-au dovedit până la urmă a fi echivalente.

O interesantă generalizare a algoritmului a fost dată prin aşa-numita „problemă a cuvintelor". Ea a luat naştere în anumite sectoare ale algebrei moderne, cum este teoria sistemelor asociative sau teoria grupurilor, însă importanţa sa depăşeşte cu mult cadrul acestor teorii.

Elaborarea conceptului general de algoritm legitimează următoarea întrebare: se pot găsi algoritmi concreţi în baza cărora să se poată rezolva orice problemă matematică nerezolvată încă?

Dacă răspunsul la această întrebare ar fi pozitiv, speranţa leibniziană cu privire la rezolubilitatea algoritmică (prin calcul) ar deveni realizabilă, cel puţin în raport cu matematica. Insă, insuccesele cu care s-au soldat nenumăratele tentative de-a răspunde pozitiv acestei întrebări au condus, în final, la ideea incompatibilităţii de principiu în ceea ce priveşte rezolvarea algoritmică a unora dintre problemele matematice. Altfel spus, pentru o serie de probleme din matematică nu numai că nu există astfel de algoritmi, dar nici în principiu ei nu pot exista. Asemenea afirmaţii sunt însoţite astăzi de demonstraţii riguroase şi constituie în raport cu problemele respective rezultate de mare interes matematic şi teoretic în general.

3. ALGORITMII ÎN LOGICĂ

Logicienii au observat, afirmă Gr. Moisil, că „putem întrebuinţa calculul chiar dacă avem ţeluri pur logice. Ei au creat o logică algoritmică, realizarea visului leibnizian de caracteristică universală" (51; 48).

De fapt, ideea de algoritm apare mult mai devreme în logică şi chiar într-o formă destul de avansată. Reimondus Lullus este cel care imaginează în *Ars magna et ultima* (1300) un procedeu mecanic pentru obţinerea judecăţilor prin aplicarea unor reguli mecanice de combinare a termenilor. În esenţă, procedeul lui Lullus constă în a combina mecanic „principiile" sau „termenii principali" pe care îl studiază în prima parte a *Marii arte* intitulată de el *Alphabetum*. În genere, „arta" lui Lullus conţine ideea de alfabet, limbaj, interpretare şi, bineînţeles, calcul. Tot de numele lui se leagă şi prima „maşină logică" în sensul de maşină de calcul.

Evident, figura centrală din întreaga preistorie a logicii matematice rămâne Leibniz. Aşa cum am menţionat şi în primul capitol, el proiectează un vast program de reformă a ştiinţelor în care o atracţie deosebită exercită pentru logicieni ideile de *characteristica universalis* şi de *calculus ratiocinator*. Ştiinţa astfel concepută urma să poarte numele de *mathesis universalis*.

Văzute în contextul epocii lor, cercetările lui R. Lullus şi G. Leibniz nu s-au bucurat de un succes prea mare şi au trecut drept extravaganţe fără o finalitate practică sesizabilă. Numai odată cu apariţia logicii simbolice aceste idei au putut fi valorificate şi apreciate în adevărata lor lumină. De altfel, B. Russell i-a dedicat lui Leibniz o monografie în care recunoaşte influenţa acestuia atât în ceea ce priveşte concepţia sa de ansamblu, cât şi în unele detalii tehnice.

Rămânând în planul abordărilor istorice voi ilustra şi o altă situaţie logică în care este anticipată oarecum ideea de algoritm. Este vorba de procedeul reducerii modurilor silogistice cu ajutorul cuvintelor mnemotehnice introduse de medievali.

După cum se ştie, aceste cuvinte au rolul de a indica pentru fiecare mod în parte: 1) tipul premiselor şi concluziei, 2) modul din figura I la care se reduce, 3) operaţiile prin care se realizează reducerea şi ordinea efectuării lor.

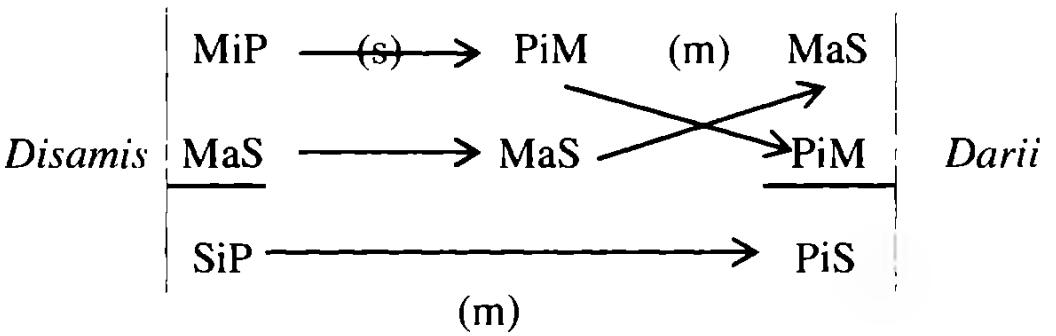
Pentru exemplificare să luăm modul *Disamis* din figura a treia.

Fiecare literă din acest cuvânt are o semnificaţie precisă, iar unele dintre ele au chiar funcţie de regulă. Să le examinăm pe rând:

D = modul din fig. I la care se reduce *Disamis* este *Darii*,
i = majora este particular afirmativă,
s = majora se converteşte simplu,
a = minora este universal afirmativă,
m = premisele se comută,

i = concluzia este particular afirmativă,
s = concluzia se converteşte simplu.

Aplicate întocmai, acele reguli îl reduc pe *Disamis* la *Darii*, reducere care are toate particularităţile algoritmului examinate în paragraful anterior.



Prin aceste cuvinte mnemotehnice, medievalii dau silogisticii o tentă algoritmică, în timp ce la Aristotel ea avea o organizare mai degrabă axiomatică.

Apariţia logicii simbolice a sporit considerabil numărul problemelor rezolvabile algoritmic. Dacă avem în vedere limbajele simbolice şi formalizate, punctul în care logica modernă se distanţează cel mai mult de logica tradiţională, atunci putem lua în considerare următoarele categorii de probleme:

1) Este o anumită secvenţă de simboluri din alfabet formulă?
2) Dacă este formulă, atunci este ea demonstrabilă?
3) Se poate spune despre o succesiune finită de formule că este demonstraţie?
4) Este o formulă anume lege logică?
5) Dacă nu este lege logică care este totuşi starea ei logică?

Prima dintre problemele enumerate se rezolvă printr-un algoritm special numit de M. Târnoveanu „algoritmul de recunoaştere a formulelor bine formate". Celelalte probleme se rezolvă de la caz la caz, în funcţie de teoriile avute în vedere.

4. ALGORITMUL ŞI PROBLEMA DECIZIEI

Am spus de mai multe ori că problema deciziei este problema numărul unu a logicii moderne, iar în capitolul II am dat şi câteva din formulările mai importante ale problemei pentru logica predicatelor. Voi relua aici discuţia dintr-o perspectivă ceva mai largă încercând să aduc şi alte precizări.

Termenul „decizie" circulă astăzi în două sensuri – algoritmic şi axiomatic. Din punct de vedere algoritmic *a decide* înseamnă a găsi, după un număr finit de paşi, valoarea formulei.

S.C. Kleene va generaliza acest sens la orice clasă de probleme de tipul „da – nu". „Să considerăm, scrie Kleene, o mulţime infinit numărabilă de probleme matematice sau logice la care se poate răspunde prin *da* sau *nu*. Există o metodă sau procedeu prin care se poate răspunde la oricare din problemele în cauză după un anumit număr de paşi?" (41; 223).

Şi mai departe: „Dacă un astfel de procedeu există, el este numit *procedeul de decizie* sau *algoritmul* pentru clasa de probleme dată".

Iată şi câteva din exemplele cu care Kleene ilustrează problema deciziei pentru matematică:

1) Există un procedeu de decizie pentru clasa de probleme „*a* divide *b*"?

2) Există un procedeu de decizie pentru a determina dacă ecuaţia

$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_{n-1} x + a_n = 0, (a \neq 0, n > 0)$ are soluţii raţionale?

Relativ la un sistem formal *S*, Kleene exemplifică următoarele categorii de probleme:

1) Este o anumită construcţie formală din sistem formulă?

2) Este o anumită succesiune finită de formule demonstraţie?

3) Este o formulă anume demonstrabilă?

Prima şi a doua problemă se rezolvă relativ simplu în sensul că pentru fiecare situaţie în parte se verifică dacă definiţiile conceptelor de formulă şi demonstraţie se aplică respectivelor situaţii sau nu. A treia este însă radical diferită (sau „netrivială", cum se exprimă Kleene). Ea este cunoscută sub numele de „problema deciziei pentru sistemele formale".

Dacă pentru o serie de probleme date există un procedeu de decizie spunem că acea clasă este decidabilă, în caz contrar, ea este indecidabilă.

Predicatele „decidabil", „indecidabil" se aplică claselor, problemelor şi expresiilor (în logică), condiţiile rămânând aceleaşi.

Sistemul axiomatic poate rezolva (cel puţin în parte) problema deciziei, de aceea, se impune să luăm în considerare şi al doilea sens al termenului „decizie", cel axiomatic. El a fost introdus de Gödel în celebrul său memoriu din 1931.

În esenţă, problema lui Gödel era de a şti dacă sistemele formale de tipul *Principiei Mathematica* sunt suficient de puternice pentru „a decide asupra oricărei probleme matematice ce poate fi formal reprezentată în sistem" (29; 327).

Ce înseamnă aici a decide?

Înseamnă a determina pentru o formulă oarecare dacă este sau nu demonstrabilă, cu alte cuvinte, dacă respectiva formulă este sau nu teoremă în sistem.

De ce spun că decizia axiomatică este o decizie limitată (sau parţială)?

Pentru că dacă o formulă s-a dovedit a nu fi teoremă, noi nu putem şti care este totuşi starea ei logică (este ea contradicţie? Este cel puţin realizabilă?).

Dar lucrul cel mai important este că noi nu putem şti dacă pentru o formulă arbitrară există realmente o demonstraţie în sistem. Ar trebui să dispunem şi aici de un algoritm, dar

atunci decizia algoritmică devine o condiţie pentru decizia axiomatică. Cel puţin acesta este sensul definiţiei pe care o dă A. Church: „Problema deciziei pentru un sistem logic este problema găsirii unui procedeu efectiv sau algoritm, un *procedeu de decizie* prin care, pentru o formulă arbitrară a sistemului, este posibil a determina dacă ea este sau nu teoremă (şi dacă este teoremă a obţine o demonstraţie pentru ea)" (13; 99).

Să presupunem că un asemenea algoritm există. Conform definiţiei lui Church, problema deductibilităţii se reduce la o simplă problemă de calcul ceea ce din punct de vedere logic nu este tocmai clar. Fiecare teoremă îşi are propriul său mecanism de demonstrare care nici pe departe nu se reduce la aplicarea mecanică a unor reguli. Este drept că începând cu Wang Hao foarte mulţi autori au încercat să algoritmizeze deducţia axiomatică (să „maşinizeze" logica) însă rezultatele sunt încă destul de modeste.

Cum trebuie să înţelegem atunci definiţia lui A. Church?

Această definiţie presupune două condiţii, care, în textul reprodus, nu apar exprimate: 1) sistemul la care ne referim este complet, şi 2) există un concept de validitate pentru formulele sistemului respectiv.

Dacă printr-un procedeu oarecare (semantic sau sintactic) se dovedeşte că o formulă este validă, atunci ea estre teoremă întrucât sistemul este complet (orice formulă validă este teoremă în sistem, şi invers). Cel puţin în formularea sa generală problema deciziei se dovedeşte astfel rezolvabilă.

Nu întotdeauna cele două condiţii sunt realizabile în acest fel. S-ar putea să nu dispunem de un concept specific de validitate, cum s-a întâmplat în logica modală, sau ca sistemul să nu fie complet. Nefiind complet, se înţelege că el nu este decidabil.

Incompletitudinea sistemului axiomatic al logicii predicatelor - l-a condus pe A. Church la demonstrarea indecidabilităţii algoritmice a logicii predicatelor. A. Tarski va elabora, la rândul lui, o teorie generală a indecidabilităţii.

În concluzie, o mulţime M este decidabilă relativ la o proprietate F dacă şi numai dacă, în baza unui procedeu oarecare, pentru orice $x \in M$ noi putem alege (decide) între $F(x)$ şi $\sim F(x)$. Această formulare generală a problemei deciziei se poate particulariza mai departe după 1) natura elementelor lui M, 2) proprietatea F şi 3) procedeul de decizie.

5. PROBLEMA DECIZIEI ÎN LOGICA PROPOZIŢIILOR

Logica propoziţiilor este decidabilă în toate sensurile discutate mai sus (sintactic şi semantic, algoritmic şi axiomatic). Decizia semantică constă în a construi matricea formulei prin care se determină valoarea ei pentru diferitele valori ale variabilelor. Denumirea de „calcul matriceal" se datorează faptului că în stabilirea matricilor se aplică reguli de adevăr în baza cărora valoarea formulei se calculează aşa cum se calculează şi valoarea funcţiilor. În definitiv, matricile definesc funcţii de adevăr, iar decidabilitatea logicii propoziţiilor se bazează tocmai pe calculabilitatea acestor funcţii. Trebuie totuşi precizat că aici avem de-a face cu un calcul logic, diferit de calculul matematic uzual (se aplică la entităţi logice şi se realizează într-un simbolism specific logicii). Chiar dacă pe anumite porţiuni se poate utiliza limbajul aritmetic, calculul aritmetic nu poate îndeplini în totalitate funcţiile calculului logic.

Simplu şi eficient, calculul matriceal nu este lipsit de anumite limite. El poate fi folosit cu succes când numărul variabilelor propoziţionale este relativ mic însă devine impracticabil când numărul acestora creşte. De exemplu, pentru o formulă cu 5 variabile ar trebui construită o matrice cu 32 de linii (numărul de linii într-o matrice este 2^n unde n este numărul variabilelor). În asemenea situaţii se folosesc procedee

simplificate ce constau în înlocuirea în formulă a valorii variabilelor şi în aplicarea aşa-numitelor „legi de posibilitate". Aceste legi redau valoarea unei formule când se cunoaşte doar una din valorile variabilelor, ca în tabelul de mai jos:

A	v	f
~A	f	v
A • B	B	f
A ∨ B	v	B
A → B	B	v
A + B	$\sim B$	B
A ≡ B	B	$\sim B$

Să presupunem că trebuie să decidem asupra formulei

$$A \to ((\sim A \vee \sim B) \to (\sim C \bullet B)).$$

Facem mai întâi supoziţiile $A = v$ şi $A = f$, la care aplicăm apoi legile de posibilitate descrise mai sus:

(1) $v \to ((\sim v \vee \sim B) \to (\sim C \bullet B))$, (1`) $f \to ((\sim f \vee \sim B) \to (\sim C \bullet B))$

(2) $(f \vee \sim B) \to (\sim C \bullet B)$, (2`) v

(3) $\sim B \to (\sim C \bullet B)$.

Valoarea formulei iniţiale depinde acum de valoarea formulei (3) pe care o calculăm mai departe după valoarea variabilei B:

(4) $\sim v \to (\sim C \bullet v)$ (4`) $\sim f \to (C \bullet f)$

(5) $f \to \sim C$ (5`) $v \to f$

(6) v (6`) f.

Pentru că formula noastră ia valoarea *v* pentru unele valori ale variabilelor sale şi *f* pentru altele, ea este realizabilă (sau consistentă).

Acest raţionament prescurtat poate fi redat matriceal indicându-se valoarea formulei doar pentru valorile variabilelor discutate.

A, B, C	$A \rightarrow ((\sim A \vee \sim B) \rightarrow (\sim C \bullet B)$
$v \quad v$	v
f	v
$v \quad f$	f

Statutul unei formule poate fi recunoscut, fie calculând valoarea formulei respective, ca în exemplul de mai sus, fie aducând-o la o formă standard numită, de aceea, „formulă normală".

Decizia prin forme normale este modalitatea sintactică de decizie în logică. Mă voi ocupa aici numai de formele normale booleene (cele care au la bază operatorii booleeni: -, • , ∨) însă trebuie ştiut că există şi alte forme normale. La noi, E. Mihăilescu a studiat formele normale bazate pe echivalenţă pe care le-a aplicat apoi în analiza diferitelor proprietăţi ale sistemelor axiomatice. Din păcate, E. Mihăilescu nu a făcut explicit procedeul său, motiv pentru care el nu a mai fost folosit până la momentul de faţă.

Mai întâi câteva definiţii[1]:

***Definiţia* 1**. Se numeşte termen prim orice variabilă propoziţională sau negaţie a acesteia (ex. p, q, r, $\sim p$, $\sim q$, ...).

***Definiţia* 2.** Se numeşte conjuncţie primă orice termen prim şi orice conjuncţie de termeni primi (ex. A, B, $\sim A$, $A \bullet B$, $A \bullet \sim B \bullet \sim C$ etc.).

[1] Aceste definiţii le-am reformulat după cartea lui Gh. Enescu, *Logica Simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971, pag. 46.

***Definiţia* 3**. Se numeşte disjuncţie primă orice termen prim şi orice disjuncţie de termeni primi (A, B, $\sim A \vee B \vee C$ etc.).

***Definiţia* 4**. Se numeşte formă normală conjunctivă conjuncţia oricărei mulţimi de disjuncţii prime.

***Definiţia* 5**. Se numeşte formă normală disjunctivă disjuncţia oricărei mulţimi de conjuncţii prime.

O specie aparte de forme normale sunt formele normale perfecte în care fiecare conjuncţie, respectiv, disjuncţie primă conţine toate variabilele care apar în formulă cu sau fără negaţie.

Algoritmul normalizării este exemplul clasic de algoritm în logică. Regulile care stau la baza lui se pot clasifica în trei mari grupe.

1) Reguli de eliminare a operatorilor nebooleeni (aceste reguli constau în transcrierea operatorilor propoziţionali prin -, •, respectiv, ~, $\vee$.

2) Reguli de coborâre a negaţiei pe variabilă (constau în aplicarea legilor dublei negaţii şi a transformărilor de Morgan).

3) Reguli de formare a conjuncţiei, respectiv, disjuncţiei normale (se aplică, după caz, distributivitatea conjuncţiei la disjuncţie şi invers).

Formele normale perfecte mai adaugă o categorie de reguli, şi anume reguli de introducere a variabilelor. Presupunând că α este o conjuncţie, respectiv, disjuncţie primă, care nu conţine pe A, variabila A se adaugă în felul următor:

1) $\alpha \bullet (A \vee \sim A) = (\alpha \bullet A) \vee (\alpha \bullet \sim A)$

2) $\alpha \vee (A \bullet \sim A) = (\alpha \vee A) \bullet (\alpha \vee \sim A)$.

Aceste reguli sunt aplicaţii ale legilor de posibilitate $\alpha \bullet v = \alpha$ şi $\alpha \vee f = \alpha$ unde $A \vee \sim A$ stă pentru v, iar $A \bullet \sim A$ stă pentru f.

Cum recunoaştem statutul unei formule după forma ei normală?

Cel mai simplu ar fi urmărind dacă în conjuncţiile şi disjuncţiile prime apare o variabilă împreună cu negaţia ei. Constituenţii respectivi vor fi în acest caz, fie tautologii, fie contradicţii, statutul formulei fiind uşor de apreciat.

Se înţelege că nu întotdeauna lucrurile stau atât de simplu şi atunci trebuie să aducem formula respectivă la una din formele normale perfecte. Decizia prin formele normale perfecte se realizează în baza unor corelaţii ce pot fi stabilite între numărul de constituenţi ai formei normale şi numărul de variabile din formulă. Dacă numărul de constituenţi din f.n.d.p. este 2^n (n fiind numărul de variabile), atunci formula este tautologie. Dacă numărul de constituenţi din f.n.c.p. este 2^n, formula este contradicţie. Dacă numărul de constituenţi dintr-o formă normală perfectă (fie ea conjunctivă sau disjunctivă) este mai mic de 2^n, atunci formula este realizabilă.

Mai trebuie adăugat că tautologiile nu au f.n.c.p., iar contradicţiile nu au f.n.d.p.

Iată şi o ilustrare foarte simplă de decizie prin f.n.d.p. asupra formulei care ne-a servit drept exemplu până acum.

1) $A \rightarrow ((\sim A \vee \sim B) \rightarrow (\sim C \bullet B))$
2) $\sim A \vee (\sim(\sim A \vee \sim B) \vee (\sim C \bullet B))$
3) $\sim A \vee (\sim\sim A \bullet \sim\sim B) \vee (\sim C \bullet B)$
4) $\sim A \vee (A \bullet B) \vee (\sim C \bullet B)$.

Adăugăm la $\sim A$ mai întâi pe B şi apoi pe C:

$\sim A \bullet (B \vee \sim B) = (\sim A \bullet B) \vee (\sim A \bullet \sim B)$
$(\sim A \bullet B) \bullet (C \vee \sim C) = (\sim A \bullet B \bullet C) \vee (\sim A \bullet B \bullet \sim C)$
$(\sim A \bullet \sim B) \bullet (C \vee \sim C) = (\sim A \bullet \sim B \bullet C) \vee (\sim A \bullet \sim B \bullet \sim C)$.

Tot în 4) adăugăm la $(A \bullet B)$ pe C iar la $(\sim C \bullet B)$ pe A:

$(A \bullet B) \bullet (C \vee \sim C) = (A \bullet B \bullet C) \vee (A \bullet B \bullet \sim C)$

$(\sim C \bullet B) \bullet (A \vee \sim A) = (A \bullet B \bullet \sim C) \vee (\sim A \bullet B \bullet \sim C)$.

În locul formulei 4) am obţinut o formă echivalentă cu ea:

5) $(\sim A \bullet B \bullet C) \vee (\sim A \bullet B \bullet \sim C) \vee (\sim A \bullet \sim B \bullet C) \vee (\sim A \bullet \sim B \bullet \sim C) \vee (A \bullet B \bullet C) \vee (A \bullet B \bullet \sim C) \vee (A \bullet B \bullet \sim C) \vee (\sim A \bullet B \bullet \sim C)$.

Reducem termenii asemenea conform legii de indempotenţă a disjuncţiei şi obţinem f.n.d.p. a formulei noastre:

6) $(A \bullet B \bullet C) \vee (\sim A \bullet B \bullet C) \vee (A \bullet B \bullet \sim C) \vee (\sim A \bullet \sim B \bullet C) \vee (\sim A \bullet B \bullet \sim C) \vee (\sim A \bullet \sim B \bullet \sim C)$.

Pentru că numărul de constituenţi din această formă normală este mai mic decât 2^3, formula 1) este o formulă realizabilă.

6. PROBLEMA DECIZIEI ÎN LOGICA PREDICATELOR

Fără să fie decidabilă în sens general, logica predicatelor este totuşi decidabilă în sens particular. Vreau să spun că problema deciziei se discută aici pe cazuri particulare date în principal de: 1) structura domeniilor, 2) structura formulei, 3) tipul cuantificării ş.a.

Din punct de vedere semantic, decizia se realizează cu ajutorul unor tabele de adevăr asemănătoare celor din logica propoziţiilor. Condiţia este ca domeniul de interpretare să fie suficient de restrâns iar structura formulei să fie şi ea rezonabilă. Aceste condiţii sunt cât se poate de imprecise, de acea voi recurge la un exemplu.

Să considerăm formula $\forall x\, F(x)$ definită pe un domeniu $D = \{a, b\}$. Variabila predicativă F ia valori într-o mulţime de predicate ce pot fi clasificate în patru mari categorii:
1) Adevărate atât a pentru cât şi pentru b,

2) Adevărate pentru a şi false pentru b,
3) False pentru a şi adevărate pentru b,
4) False pentru a ca şi pentru b.

Predicatele din prima categorie le vom nota cu $F_1(x)$, pe cele din a doua cu $F_2(x)$, şi aşa mai departe. Următorul tabel redă valorile formulei $F(x)$ pentru valorile F_1, F_2, F_3, F_4, ale variabilei F şi pentru valorile a, b, ale variabilei x:

$F(x)$	a , b
$F_1(x)$	v , v
$F_2(x)$	v , f
$F_3(x)$	f , v
$F_4(x)$	f , f

Întrucât cuantorul universal se transcrie cu ajutorul conjuncţiei, întreaga formulă se poate desfăşura ca o succesiune de conjuncţii după valoarea variabilei F:

$F(x)$	$\forall x\, F(x) = F(a) \bullet F(b)$
$F_1(x)$	$\forall x\, F_1(x) = F_1(a) \bullet F_1(b)$
$F_2(x)$	$\forall x\, F_2(x) = F_2(\mathrm{a}) \bullet F_2(b)$
$F_3(x)$	$\forall x\, F_3(x) = F_3(a) \bullet F_3(b)$
$F_4(x)$	$\forall x\, F_4(\mathrm{x}) = F_4(a) \bullet F_4(b)$

Înlocuind pe $F_1(a)$, $F_1(b)$, $F_2(a)$, ... cu valorile lor din primul tabel şi aplicând regulile de adevăr pentru conjuncţie, obţinem în final următoarea matrice:

$F(x)$	$\forall x\, F(x)$
$F_1(x)$	v
$F_2(x)$	f
$F_3(x)$	f
$F_4(x)$	f

Se observă că pentru domeniul ales, formula $\forall x\, F(x)$ are aceeaşi matrice cu conjuncţia şi este uşor de arătat că şi $\exists x\, F(x)$ va avea aceeaşi matrice cu disjuncţia. De fapt „$\forall$", „$\exists$" sunt conjuncţii, respectiv disjuncţii „deghizate", proprietăţile lor formale fiind în mare măsură aceleaşi.

În orice caz, formula este adevărată pentru unele interpretări şi falsă pentru altele şi acesta este lucrul cel mai important pentru problema în discuţie.

Din punct de vedere sintactic, decizia în logica predicatelor se realizează tot prin forme normale, însă aceste forme normale sunt de un tip mai special. Pentru a putea identifica cazurile de decidabilitate prin algoritmul nominalizării, sunt necesare câteva concepte noi pe care le voi reproduce în continuare.

Formulă redusă. O formulă A este redusa formulei B dacă în formula A figurează numai operatorii booleeni iar negaţia afectează cel mult variabile propoziţionale (dacă apar) şi variabilele predicative. Formula $\exists x\ {\sim}F(x) \vee F(y)$ este formă redusă pentru $\forall x\, F(x) \rightarrow F(y)$.

Formă normală prenexă. O formulă redusă este formă normală prenexă dacă: 1) nu conţine cuantori şi este în formă normală booleană, sau 2) cuantorii formează un prefix, iar matricea (= domeniul de acţiune al prefixului) este în formă normală booleană. Formula $\forall x\ \forall y\ ({\sim}F(y) \vee H(x, y)$ este formă normală prenexă pentru $\forall x\ [\exists y\ F(y) \rightarrow H(x, y)]$.

Formă normală Skolem. O formă normală în care nici un cuantor existenţial, dacă apare, nu urmează unui cuantor universal se numeşte formă normală Skolem.

Conform teoremei lui Skolem, orice formulă predicativă are o formă normală Skolem deductiv echivalentă cu ea.

Ce înseamnă această „echivalenţă deductivă"?

Dacă A, B, C sunt formule predicative şi dacă $A, B \vdash C$ respectiv $A, C \vdash B$, atunci C şi B sunt în relaţie de echivalenţă deductivă relativ la A.

Este discutabil astăzi dacă se poate da sau nu un inventar complet al cazurilor de decidabilitate din logica predicatelor. Câteva din cele mai importante au fost adunate de W. Ackermann în cartea sa *Solvable cases of decision problem* (Amsterdam, 1954). Este vorba, în principal, de formule care conţin numai variabile predicative de un singur argument, plus o serie de formule a căror forme prenexe sunt de un tip mai special, şi anume:

1) prefixul lor nu conţine cuantorii existenţiali,
2) prefixul nu conţine cuantorii universali,
3) cuantorii existenţiali, dacă există, nu apar în faţa unui cuantor universal,
4) prefixul nu conţine mai mult de un cuantor existenţial,
5) prefixul nu conţine mai mult de doi cuantori existenţiali între care nu apare un cuantor universal,
6) matricea formei prenexe este o disjuncţie de formule elementare şi negaţii ale acestora,
7) prefixul este de forma $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n) (\forall y_1) \ldots (\forall y_m)$ şi fiecare formulă elementară din matrice care conţine una sau mai multe din variabilele $x_1, \ldots, x_n$, le conţine sau pe toate aceste variabile sau una din variabilele $y_1, \ldots, y_m$,
8) prefixul se încheie cu $(\forall z_1) \ldots (\forall z_n)$ şi fiecare formulă elementară din matrice care conţine cel puţin una din variabilele din prefix va conţine cel puţin una din variabilele $z_1, z_2, \ldots, z_n$,
9) prefixul este de forma $(\exists x) (\forall y) (\exists z_1) \ldots (\exists z_n)$ unde $n \leq 4$, iar matricea este de forma $G(x, y) \rightarrow H(z_1, \ldots, z_n)$.

Se demonstrează în continuare o serie de teoreme numite şi „teoreme de evaluare", care stabilesc valoarea formulei în

funcţie de forma prenexă la care ea poate fi adusă şi de domeniul de valori ale variabilelor sale individuale.

Teorema 1. O formulă $(\forall x_1)... (\forall x_m)\ M\ [x_1,..., x_n]$ care nu are decât cuantori universali este universal validă dacă este validă într-un domeniu cu *m* indivizi.

Teorema 2. O formulă $(\exists x_1)... (\exists x_n)\ M\ [x_1,..., x_n]$ care nu conţine decât cuantori existenţiali este universal validă dacă este validă într-un domeniu cu un singur individ.

Teorema 3. O formulă $(\forall x_1)...(\forall x_n)\ (\exists y_1)...(\exists x_m)\ M\ [x_1,..., x_n; y_1,..., y_m]$ în care toţi cuantorii universali preced cuantorii existenţiali, este universal validă dacă este validă în orice domeniu cu *n* indivizi.

Formele normale Skolem aduc în discuţie ideea de *reducţie* şi *clase de reducţie*. Prin „reducţie" se înţelege un procedeu (algoritm) în baza căruia, pentru o formulă oarecare se poate construi o altă formulă dintr-o clasă determinată (= clasa de reducţie) care este în raport de echivalenţă deductivă cu ea. J. Surányi va dedica o monografie problemei reducţiei în genul monografiei lui W. Ackermann pentru problema deciziei[1].

7. CONCLUZII

Metoda algoritmică are o situaţie asemănătoare celorlalte concepte şi metode matematice întâlnite până acum în logică. Apărută pe terenul matematicii, ea a depăşit în momentul de

[1] Pentru detalii suplimentare vezi studiul lui Gh. Enescu, *Problema deciziei în logica standard* (Analele Univ. Bucureşti, seria Filosofie, Anul XXXVI, 1987) şi vol. II din W. şi N. Kneale, *Dezvoltarea logicii* (Editura Dacia, Cluj, 1975).

faţă graniţele acestei ştiinţe. După cum s-a putut observa, o serie de procedee logice prezintă aceleaşi particularităţi cu algoritmii din matematică şi acesta este motivul principal pentru care vorbim astăzi de „metoda algoritmică" în logică.

Dacă privim lucrurile din perspectiva acestei particularităţi, atunci algoritmii din matematică, ca şi cei din logică, ne apar drept cazuri particulare în raport cu un concept foarte general de algoritm. Nevoia elaborării unui asemenea concept a apărut tocmai în momentul în care s-a descoperit că şi în alte domenii se aplică metode ce întrunesc, din punct de vedere formal, condiţiile algoritmului matematic.

Trakthenbrot (71) împarte algoritmii în două mari categorii – algoritmi matematici şi algoritmi logici. În această ultimă categorie intră orice algoritm care nu este matematic. Totuşi, unii dintre ei, cum este algoritmul căutării drumului într-un labirint, au prea puţin în comun cu logica. Întrebarea care se pune, aşadar, este ce criterii folosim pentru a aprecia natura unui algoritm?

Trei lucruri trebuie să avem în vedere când analizăm această problemă: 1) natura entităţilor la care algoritmul se aplică, 2) sistemul de simboluri (limbajul) prin care el se realizează, 3) problemele pe care le rezolvă.

Faptul că aceste condiţii pot fi discutate în logică ne obligă să considerăm algoritmul logic ca pe o specie aparte de algoritm. Aceleaşi criterii ne ajută să determinăm în continuare diferitele subspecii ale speciei logice de algoritm. Vorbim astfel de algoritmi sintactici şi algoritmi semantici, deşi unii dintre ei se aplică în rezolvarea uneia şi aceleiaşi probleme (vezi problema deciziei).

Ce raport există între algoritm şi inferenţă, în speţă inferenţa de tip deductiv?

În *Mica enciclopedie de matematică* citim în capitolul *Algoritmi şi funcţii recursive* următoarele: „În cadrul matema-

ticii şi logicii algoritmii apar ca metode generale pentru rezolvarea tuturor problemelor dintr-o clasă dată (...). Ca exemple de procese algoritmice sunt inferenţa logică şi unele procese de calcul din matematică, în particular, metode de rezolvare pentru diferite tipuri de ecuaţii" (78; 421).

Prima afirmaţie din acest pasaj este o observaţie generală asupra algoritmului şi nu ridică probleme. A doua însă trebuie luată după părerea mea cu rezerve. Concluziile se deduc nu se calculează, prin urmare, derivabilitatea (sau deductibilitatea) este altceva decât simpla rezolvare algoritmică. Aici intervine, de altfel, deosebirea esenţială dintre metoda axiomatică şi metoda algoritmică. Într-un anumit fel, sistemul axiomatic rezolvă problema deciziei, însă algoritmul nu rezolvă peste tot problema deductibilităţii. Fiecare formulă validă îşi are propriul său mecanism de demonstrare, ceea ce anulează caracterul „de masă" al procesului (definitoriu pentru algoritm).

Începând cu anii 60 ai secolului trecut, dacă nu cumva chiar mai devreme, o serie de autori au încercat să algoritmizeze procesul de deducţie, să „maşinizeze" logica pe baza operaţiei de programare. Trebuie spus că performanţele cu totul excepţionale ale maşinilor de calcul din zilele noastre au redeşteptat speranţa inventării de maşini cu „virtuţi logice" asemănătoare omului dacă nu cumva superioare lui. Totuşi, rezultatele s-au dovedit a fi destul de modeste pentru că teoremele obţinute pe această cale, fie că au fost deja demonstrate, fie că nu au fost demonstrate, dar atunci sunt banale şi nu prezintă un interes teoretic deosebit. „Scopul matematicianului, arată Rasiowa şi Sikorski, nu este doar de a deduce enunţurile adevărate, ci şi de a descoperi enunţuri interesante. Mecanizarea, posibilă din punct de vedere teoretic, a procesului de deducţie în matematică, nu are nici o valoare practică" (61; 201).

Actualele cercetări din domeniul inteligenţei artificiale ne îndeamnă la prudenţă când discutăm aceste probleme. Ce-

ea ce părea imposibil acum jumătate de secol, s-ar putea să nu mai pară la fel de imposibil astăzi. Pe de altă parte, conceptul de „inteligenţă artificială" nu trebuie să inducă în eroare pentru că nu este identic cu inteligenţa umană, ci reprezintă doar o parte din ceea ce este stereotip în această inteligenţă. Să nu uităm apoi că în ultima vreme direcţia de cercetare s-a deplasat spre nivelul metateoretic unde dispunem de mai puţin formalism şi unde se cere foarte multă intuiţie.

Rămân apoi problemele de fundamentare, cum este problema şi paradoxelor, care depind în mod esenţial de capacitatea de autoreflexie a omului. Când maşina va dobândi o asemenea capacitate de autoreflexie, ea va candida la un loc apropiat de cel al omului şi când spun aceasta nu mă gândesc neapărat la probleme de creaţie tehnică.

În concluzie, logica rămâne alături de matematică unul din cele mai importante domenii în care îşi găsesc aplicarea procesele algoritmice. Utilizarea lor a dus la o sporire considerabilă a preciziei pentru că, aşa cum arăta la vremea lui Gr. Moisil, prin întrebuinţarea calculului termenii au dobândit o semnificaţie univocă.

V. MATEMATICA ŞI CONCEPTUL SEMANTIC DE MODEL

Vorbind despre limbajele simbolice şi formalizate am făcut referiri şi la unele probleme legate de semantica acestor limbaje – problema interpretării, problema valorii formulelor relativ la o anume interpretare, problema domeniilor de interpretare ş.a. În capitolul de faţă voi relua discuţia din perspectiva conceptului semantic de model.

Toate conceptele matematice pe care le-am examinat în capitolul III îşi găsesc utilizarea aici, motiv pentru care semantica modernă („algebrică" sau „structurală", cum mai este cunoscută ea astăzi) se prezintă adeseori sub forma unor teorii cu un pronunţat caracter matematic.

Unii autori identifică noua formă a semanticii logice cu teoria modelelor, idee pe care nu o împărtăşesc în totalitate. Cele două teorii se intersectează în zone destul de largi, totuşi, ele nu sunt identice în totalitate. După cum precizează A. Mostowski, teoria modelelor este destinată aprofundării unor discipline matematice, ca şi unor aspecte ce ţin de fundamentele matematicii. Din această cauză nu voi intra în toate detaliile teoriei modelelor, ci mă voi rezuma doar la acele aspecte care sunt de interes pentru logică.

1. INTERPRETARE ŞI MODEL

Prima problemă care trebuie discutată şi de care depinde în bună măsură înţelegerea celorlalte probleme este *ce anume interpretăm*?

S-a încetăţenit ideea, cel puţin în literatura noastră de specialitate, că interpretarea se referă la diferitele tipuri de limbaj. Iată ce scrie în acest sens Gh. Enescu în *Teoria siste-*

melor logice: „Orice limbaj în înțelesul deplin al cuvântului (ca unitate sintactico-semantică) conține deja o interpretare. A interpreta înseamnă a acorda referent pentru *formele sintactice* (simboluri elementare și secvențe finite de asemenea simboluri). Strict vorbind deci, interpretarea are sens numai în raport cu formele sintactice (formele grafice în speță). Dacă vorbim de „interpretarea unui limbaj" aceasta înseamnă o „reinterpretare" în care renunțăm la conținutul cognitiv inițial (sau deja existent) al expresiilor pentru a le acorda altul (în acest mod a procedat Hilbert cu geometria în ce privește termenii, în acest mod se procedează cu cifrele prin trecerea de la un sistem în baza zece la un alt sistem)" (20; 324).

Reținem deci că problema interpretării se pune în raport cu sintaxa limbajului (sistemul de semne prime) și nu cu limbajul propriu-zis unde avem, de fapt, o reinterpretare. În sistemele formale este vorba tot de interpretări pentru că nici aici obiectele formale nu sunt racordate inițial unui referent. Prin interpretare, aceste obiecte formale devin expresii într-un limbaj formalizat.

Fie S un sistem de obiecte formale și D un domeniu de semnificații oarecare nevid. Prin interpretarea lui S în D înțelegem un ansamblu de corespondențe între S și D prin care fiecărui element sau secvență finită de elemente din S îi corespunde un element determinat din D.

Dacă ținem seama că și domeniul D este dat tot printr-un limbaj, să-l notăm cu L_D, atunci interpretarea lui S înseamnă, de fapt, un ansamblu de corespondențe între S și L_D. De regulă, aceste corespondențe satisfac condițiile unor corespondențe funcționale, de aceea interpretarea lui S poate fi dată și sub forma unei funcții, sau aplicații, de la S la D sau de la S la L_D. Regulile de corespondență, aceleași cu regulile de interpretare, se formulează de la caz la caz, în funcție de structura, tipul și complexitatea sistemului formal S.

Un sistem de semnificaţii pentru care o formulă α din S devine propoziţie adevărată se numeşte *modelul* lui α. Altfel spus, modelul este acea interpretare care transformă formula α în propoziţie adevărată. Câteva precizări se impun aici.

1) Termenul „model" poate fi luat numai pentru desemnarea acelor semnificaţii în raport cu care formula devine propoziţie adevărată. Modelul formulei $\exists x\, Fxy$, de exemplu, poate fi mulţimea M = {≥, 3} formată din predicatul „mai mare sau egal" şi conceptul numeric „trei". Propoziţia „$\exists x\, (x \geq 3)$" este o propoziţie adevărată în aritmetica numerelor întregi.

2) Dacă interpretarea este concepută ca funcţie, aşa cum am mai spus, atunci modelul poate fi dat ca un sistem M = {D, φ}. Pentru conceptul „adevărat în M" putem introduce notaţiile (inspirate de la Mostowski): $\vdash_M \alpha$ şi $\vdash^{\varphi}_D \alpha$. În prima apare modelul ca întreg, în a doua apar elementele constitutive ale modelului (funcţia de interpretare φ şi domeniul D).

3) O expresie se poate raporta la domeniu în două modalităţi:
„A avea sens în D" = df „a putea fi interpretat în D",
„A avea loc în D" = df „A fi adevărat relativ la o anume interpretare în D".

Cu alte cuvinte, domeniul D poate fi descris prin limbajul formalizat L_S dacă şi numai dacă expresiile din L_S se raportează adevărat sau fals la D. Sunt excluse din capul locului acele situaţii în care s-ar putea obţine expresii fără sens. Această condiţie a fost impusă de nevoia eliminării paradoxelor.

Într-o abordare generală, natura domeniilor nu se specifică, o expresie putând fi adevărată sau falsă indiferent de domeniu şi de interpretarea semnelor care apar în ea. Uneori însă, este important să cunoaştem unele lucruri despre domeniu. De exemplu, dacă o formulă este cuantificată existenţial se impune ca domeniul ei să fie nevid. În acest caz, el poate fi

sau finit sau infinit. Dacă este finit, numărul lui de elemente poate fi determinat sau nedeterminat, iar dacă este infinit, el poate fi infinit numărabil sau nenumărabil.

După natura elementelor distingem între modele matematice şi nematematice. Primele pot fi structurate (se definesc pe ele operaţii şi relaţii ce verifică axiomele unor cunoscute structuri matematice) sau nestructurate (simple mulţimi).

2. MODELE ARITMETICE ÎN LOGICĂ

Dintre domeniile matematice un interes aparte îl prezintă, pentru problema modelelor, aritmetica. Diferitele sisteme de aritmetică pot furniza modele pentru silogistică, pentru logica propoziţiilor, logica predicatelor, pentru anumite sisteme de logică polivalentă şi modală.

Primul model aritmetic în logică a fost construit de Leibniz în 1679 pentru silogistică şi a avut drept scop examinarea validităţii modurilor silogistice şi a inferenţelor imediate studiate de Aristotel. În esenţă, procedeul lui Leibniz constă în asocierea de perechi de numere prime între ele şi de semn contrar celor doi termeni din structura propoziţiilor de predicaţie.

În modelul lui Leibniz, o propoziţie universal afirmativă este adevărată dacă numerele subiectului pot fi divizate prin numerele de acelaşi semn ale predicatului. De exemplu, dacă termenului *A* îi corespunde perechea <70;-33> şi termenului *B* perechea <10, -3>, atunci propoziţia „Toţi *A* sunt *B*" este adevărată pentru că:

a) 70 şi -33 respectiv 10 şi -3 sunt prime între ele,

b) 70 este divizibil cu 10 şi -33 este divizibil cu -3.

O propoziţie universal negativă este adevărată dacă două numere de semne diferite şi aparţinând la termeni diferiţi în propoziţie au cel puţin un divizor comun.

Propoziţiile particulare sunt adevărate când universalele corespunzătoare lor de calitate opusă sunt false (regulile de interpretare se deduc cu uşurinţă).

Un mod silogistic este valid dacă, în interpretarea dată, adevărul concluziilor derivă din adevărul premizelor.

În secolul nostru, modelul lui Leibniz a fost preluat de către J. Slupecki care l-a simplificat şi l-a adaptat demonstraţiilor de consistenţă în raport cu diferitele axiomatizări date silogisticii. Interpretările care stau la baza acestor demonstraţii sunt:

SaP = „*S* divide *P*“,
SeP = „*S* şi *P* sunt prime între ele“,
SiP = „*S* şi *P* au un divizor comun“,
SoP = „*S* nu divide *P*“.

Într-un studiu sugestiv intitulat *Calculemus* (Notre - Dame Journal of Formal Logic, vol. 21 nr. 1/1980), W. N. Friedman a construit un alt model aritmetic pentru silogistică în baza următoarelor interpretări:

SaP = (1/S)P,
SeP = (1/S)(-1/P),
SiP = 2SP,
SoP = -2SP (un termen negativ, să zicem *non-S*, este interpretat prin -1/S).

Conform interpretării lui Friedman, într-un silogism valid produsul premiselor trebuie să fie egal cu concluzia. Dacă în modul silogistic premisele sunt universale şi concluzia particulară, atunci se adaugă premisa existenţială $2x^2$ (x poate fi, după caz, *S*, *P* sau *M*).

Pentru exemplificare să luăm modelul *Darapti* din figura a treia: *MaP*, *Ma*S |– *SiP*. Conform regulilor de interpretare obţinem produsul:

$$(1/M)P \times (1/M)S \times 2M^2 = 2SP.$$

Cele trei interpretări aritmetice demonstrează validitatea modurilor silogistice (fiecărui mod valid îi corespunde o propoziţie adevărată în interpretare aritmetică).

În cazul sistemelor axiomatice problema se pune mult mai simplu pentru că, în acest caz, este suficient să arătăm în baza unei interpretări oarecare că axiomele şi regulile de derivare sunt valide pentru ca toate formulele derivabile în sistem să fie valide. Aceasta este tot una cu a demonstra necontradicţia sau consistenţa sistemului, iar în axiomatica prehilbertiană se poate spune că acesta a fost chiar unicul mod de demonstrare a consistenţei. Se asigură, aşadar, consistenţa unei teorii prin consistenţa teoriei în care aceasta urmează a fi interpretată. În cazul nostru, aritmetica este o teorie consistentă, de aceea, orice altă teorie interpretabilă aritmetic este o teorie de asemenea consistentă.

O interesantă exemplificare a acestei idei am găsit-o în studiul lui L.S. Gagnon, *Three theories of dialectic* (Notre Dame Journal of Formal Logic, Nr. 2/1980), în care se demonstrează consistenţa a trei teorii formale intitulate de el TAS_1, TAS_2, TAS_3. Acestea sunt trei variante de formalizare a dialecticii hegeliene (TAS_2 este o extindere faţă de TAS_1, iar TAS_3 o extindere faţă de TAS_2).

Voi prezenta doar sistemul TAS_1 (cel mai simplu) care are la bază următorul simbolism:

x, y, z ... variabile individuale. Acestea sunt definite pe mulţimea evenimentelor (fizice şi/sau mentale).
T, A, S – constantele nelogice *teză*, *antiteză* şi *sinteză*.
(la cele două categorii de simboluri se adaugă simbolismul obişnuit din logica predicatelor).

În continuare se postulează două categorii de axiome.

Axiome existenţiale

1) $\exists x Tx$,
2) $\forall x\,(Tx \rightarrow \exists y\, Ayx)$,
3) $\forall x\, \forall y\, (Ayx \rightarrow \exists z\ Sxyz)$,

Axiome de relaţie

4) $\forall x \forall y\, [Ayx \rightarrow (Tx\ \&\ {\sim}Axy)\ ]$,
5) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \{Szxy \rightarrow [Tx\ \&\ (Axy \vee Ayx)]\} \bullet {\sim}\,(Sxyz \vee Syxz)$.

Pentru această formalizare a dialecticii hegeliene este construit un model aritmetic în mulţimea numerelor naturale, mai puţin zero, în baza următoarelor interpretări:

1) Tx = „x este impar“,
2) Axy = „x este numărul par care îi succede lui y“,
3) $Sxyz$ = „x este suma numerelor y şi z, şi fie că y îi succede lui z, fie că z îi succede lui y“.

În această interpretare aritmetică, axioma 2) se va *traduce* prin propoziţia: „Pentru orice număr x, dacă x este impar, atunci există un număr y astfel că y este numărul par care îi succede lui x“.

Întrucât toate axiomele se transformă în propoziţii aritmetice adevărate, rezultă că interpretările 1) - 3) reprezintă un model al sistemului TAS_1 în domeniul $D = \{N - \{0\}, Par, Impar, +, `\}$, astfel că sistemul TAS_1 este consistent.

3. ALTE MODELE

Exemplul reprodus este semnificativ nu doar pentru că oferă o ilustrare simplă şi intuitivă demonstraţiei de consistenţă, ci şi pentru că ne menţine în planul interpretărilor arit-

metice. Asemenea interpretări există pentru multe alte sisteme logice, aşa cum am menţionat deja la început. Totuşi, aritmetica nu este singura sursă de interpretare a formalismelor logice. Structurile matematice şi, în special acele formaţiuni algebrice definite relativ la sintaxa logică, reprezintă un alt important domeniu pentru problema interpretării şi a modelării în logică. În continuare,voi reproduce după Rasiova - Sikorski algebra sistemului deductiv al logicii propoziţiilor.

Fie α, β,... formulele în limbajul L_0 (= limbajul logicii propoziţiilor) şi „≈" o relaţie de echivalenţă în S_0, care poate fi chiar relaţia de echivalenţă logică. Formulele α, β determină relativ la „≈" clasele de echivalenţă $//\alpha//$, $//\beta//$,... astfel că $//\alpha// = \{x: x \approx \alpha\}$.

Relaţia „≈" determină o partiţie a mulţimii formulelor F_0 din L_0 pe care o vom nota cu $F_{0/\approx}$. În plus, „≈" este o congruenţă în raport cu operaţiile algebrei formulelor $F_0 = \{F_0, \bullet, \vee, \rightarrow, -\}$ şi induce în mulţimea $F_{0/\approx}$ operaţiile $\cap$, $\cup$, $\Rightarrow$, ~ după cum urmează:

$$//\alpha \bullet \beta// = //\alpha// \cap //\beta//; \qquad //\alpha \rightarrow \beta// = //\alpha// \Rightarrow //\beta//$$
$$//\alpha \vee \beta// = //\alpha// \cup //\beta// \qquad //\tilde{-} \alpha// = \sim //\alpha//.$$

Algebra $U(S_0) = \{F_{0/\approx}, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim\}$, cunoscută şi sub numele de „algebră Lindembaum", este algebra sistemului deductiv al logicii propoziţiilor $S_0 = \{L_0, Cn\}$. Ea poate fi definită, practic, în raport cu orice alt sistem deductiv.

Interesul special care se leagă de o asemenea algebră constă în faptul că permite interpretări şi modele pentru logică adecvate unei tratări pur matematice.

4. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA PROPOZIŢIILOR

Fie limbajul L_0 al logicii propoziţiilor descris în capitolul I al acestei lucrări. Există trei modalităţi principale de interpretare a semnelor care intervin în sintaxa acestui limbaj, şi anume:

1) Interpretarea prin propoziţii ale limbajului natural şi prin cuvintele de legătură „şi", „sau", „non" etc.

2) Interpretarea prin semnificaţiile logice „*v*", „*f*" (adevăr, fals) pentru variabile şi prin operaţiile cunoscute pentru operatori.

3) Interpretarea prin elementele unei algebre booleene.

Conceptul de tautologie sau lege logică se defineşte separat, pentru fiecare caz în parte.

***Definiţia* 1**. O formulă $\in \alpha L_0$ este tautologie sau lege logică dacă şi numai dacă α devine propoziţie adevărată indiferent de propoziţiile prin care sunt interpretate variabilele $x, y, \ldots$ care intervin în α.

***Definiţia* 2**. O formulă $\alpha \in L_0$ este tautologie dacă şi numai dacă are valoarea *v* (adevărat) indiferent de valorile v, f ale variabilelor sale propoziţionale.

***Definiţia* 3**. O formulă $\alpha \in L_0$ este tautologie dacă este identică cu elementul unitate în orice algebră booleeană.

După cum este uşor de remarcat, cele trei interpretări se situează la nivele diferite de abstracţie în raport cu limbajul, fiecare asociindu-şi o „metodă de lucru" (definiţii, reguli de adevăr, procedee de demonstrare, forme de expunere) aparte.

Ne interesează deocamdată interpretarea prin algebre booleene pe care o voi schiţa pe scurt în cele ce urmează.

Fie A = {A, •, ∨, →, –} o algebră booleeană (pentru simplificarea expunerii notăm tot cu •, ∨, →, – operaţiile algebrei A).

Interpretarea alfabetului A_0 din limbajul logicii propoziţiilor L_0 se numeşte *evaluare* şi se defineşte ca o funcţie v : $A_0 \rightarrow A$. Prin funcţia v, fiecare variabilă din A_0 devine un element din A şi fiecare operaţie din A_0, o operaţie în A.

Adoptăm, după Rasiova – Sikorski, notaţia $\alpha_A^{(v)}$ care înseamnă „evaluarea v a formulei α în A". Orice formulă $\alpha \in F_0$ va determina acum o aplicaţie $\alpha_A: A_0^{V0} \rightarrow A$ unde V_0 este mulţimea variabilelor propoziţionale şi a operatorilor din A_0. De exemplu, dacă α, este formula $[(x \rightarrow y) \bullet z] \vee x$, aplicaţia α_A va asocia oricărui triplet $< a, b, c, > \in A^3$ elementul $\alpha_A(a, b, c,)$ astfel că $\alpha_A(a, b, c,) = [(a \rightarrow b) \bullet c] \vee a$.

***Observaţia* 1**. Aplicaţia α_A este o aplicaţie de la A^n la A şi se numeşte *polinomul booleean* determinat de α în A. Examinarea polinoamelor booleene corespunde, într-un fel, examinării liniilor din tabelele de adevăr ale formulei α.

***Definiţia* 4**. O evaluare $v \in A^{V_0}$ într-o algebră nondegenerată A se numeşte *model* pentru o submulţime S de formule din F_0 dacă pentru orice formulă $\alpha \in S$ are loc $\alpha_A^{(v)} = 1$ (unde 1 reprezintă elementul unitate în algebra A).

***Observaţia* 2**. În notaţia adoptată la începutul acestui capitol, în loc de „$\alpha_A^{(v)}$" s-ar putea folosi „$\vdash_A^v \alpha$".

***Definiţia* 5**. Orice model al unei mulţimi S de formule din F_0 într-o algebră booleeană cu numai două elemente se numeşte *model semantic*.

***Definiţia* 6**. O formulă α, este validă în algebra A dacă orice evaluare v este un model pentru α în A (altfel spus, aplicaţia $\alpha_A^{(v)}$ este identică cu elementul unitate în A).

***Definiția* 7.** O formulă α este validă dacă este validă în orice algebră booleeană.

Fie acum $S_0 = \{L_0, Cn\}$ sistemul deductiv al logicii propozițiilor pentru care determinăm algebra $U(S_0) = \{ F_0 / \approx, \cap, \cup, \Rightarrow, \sim\}$. O evaluare v a limbajului L_0 în algebra $U(S_0)$ se numește „evaluare canonică". În acest caz, orice formulă $\alpha \in F_0$ determină o evaluare $\alpha^{(v)}_{(S0)}$ astfel că $\alpha^{(v)}_{(S0)} = // \alpha // \in (S0)$.

Următoarea teoremă stabilește o importantă relație între U (S0) și (S0).

***Teoremă*.** Dacă $U(S_0)$ este nondegenerată, atunci $S_0 = \{L_0, Cn\}$ este consistent.

***Definiția* 8.** Un model $M = \{A, v\}$ unde $v \in A^{V0}$ pentru un sistem S_0 se numește *adecvat* dacă pentru orice formulă $\alpha \in S_0$ este îndeplinită condiția: α este teoremă în S_0 dacă și numai dacă M este un model pentru α.

Cu ajutorul acestor concepte se demonstrează o serie de teoreme cu privire la validitate, derivabilitate, consistență, completitudine și independență. Acestea sunt principalele probleme ale semanticii logice în raport cu limbajul logic considerat.

5. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA PREDICATELOR

Sintaxa logicii predicatelor cuprinde următorul sistem de simboluri:

1) Simboluri pentru variabile individuale: $x_1, x_2, x_3, \ldots$;
2) Simboluri pentru constante individuale: $c_1, c_2, c_3, \ldots$;
3) Simboluri pentru predicate: $F_1, F_2, F_3, \ldots$;
4) Simboluri pentru variabile propoziționale: $P_1, P_2, P_3, \ldots$;

5) Simboluri pentru operații logice: ~, •, ∨, ≡, ∃, ∀.
6) Simboluri pentru operații nelogice: O_1, O_2, O_3,...;
7) Simboluri auxiliare: (,); [,]; {,}.

Fie α o expresie predicativă ce conține toate aceste categorii de simboluri şi D un domeniu de semnificații oarecare, nevid. Prin interpretarea lui α în D înțelegem o funcție φ care asociază:

1) Fiecărei variabile individuale x_i un element determinat $\varphi(x_i) \in D$;
2) Fiecărei constante individuale c_i, un element determinat $\varphi(c_i) \in D$;
3) Fiecărei variabile predicative F_i, un predicat $\varphi(F_i) \in D$;
4) Fiecărui semn de operație n-ară O_n o operație $\varphi(O_n)\ D^n \rightarrow D$.

(Variabilele propoziționale şi constantele propoziționale &, ∨, ~ etc. se interpretează ca în paragraful precedent. Pentru a nu complica lucrurile considerăm că P_1, P_2,... sunt propoziții adevărate sau false relative la domeniul D, iar &, ∨, ~ etc. sunt operații logice cunoscute).

Pentru a face mai intuitivă această idee de interpretare precizez că $\varphi(x_i)$ este nume pentru elemente nedeterminate în D (sau variabile individuale), $\varphi(c_i)$ este nume pentru elemente determinate în D (constante individuale), $\varphi(F_i)$ este predicat definit pe elementele din D, iar $\varphi(O_n)$ este operație n-ară în D.

Pentru cazul particular în care D = {{0, 1, 2,...},(>, =, <, *Par*, *Imp*),(x, –, +, `)}, iar α este formula

$$\forall x\,[Fx \rightarrow \exists y\,(HOxy \bullet Gy)]$$

putem adopta următoarele valori ale funcției de interpretare φ:

$$\varphi(Fx) = Par(x),$$
$$\varphi(Ox) = x`$$
$$\varphi(Gy) = Imp(y),$$
$$\varphi(HOxy) = (x` = y).$$

Prin φ formula α devine:

$$\forall x\,[Par(x) \rightarrow \exists y\,(x = y` \bullet Imp(y)],$$

adică: „oricare ar fi x, dacă x este par atunci există un număr y astfel că y este succesorul lui x şi y este impar".

Orice sistem de valori pentru care o formulă predicativă devine propoziție adevărată se va numi *modelul* respectivei formule. În cazul nostru, valorile pentru semnele din α sunt asociate prin funcţia φ, ceea ce înseamnă că sistemul M = {D, φ} este modelul lui α.

O formulă predicativă pentru care există cel puţin un model se va numi *realizabilă.*

Atât adevărul cât şi realizabilitatea sunt definite în raport cu un anumit domeniu, fapt ce permite în continuare unele generalizări.

***Definiția* 1**. O formulă α este *universal adevărată în* D dacă este adevărată pentru orice model M în D.

***Definiția* 2**. O formulă α este *universal adevărată* dacă este adevărată pentru orice model şi pentru orice domeniu.

Următoarele teoreme redau câteva din conceptele semantice mai importante ale logicii predicatelor şi relaţiile dintre ele.

***Teorema* 1**. O formulă predicativă este realizabilă în genere dacă pentru ea există un model şi este realizabilă într-un domeniu D dacă pentru ea există cel puţin un model în D. Formulele realizabile se mai numesc şi *consistente*, iar cele nerealizabile, *inconsistente*.

***Teorema* 2**. O formulă de tipul $\forall x A(x)$ este adevărată în D dacă orice valoare a lui x realizează formula $A(x)$ (sau dacă $A(x)$ este adevărată pentru orice model în D).

***Teorema* 3**. O formulă de tipul $\exists x A(x)$ este adevărată în D dacă există cel puţin o valoare a lui x în D pentru care $A(x)$ este adevărată (sau dacă $A(x)$ are cel puţin un model).

***Teorema* 4**. O formulă $F(a)$ este adevărată în D dacă $\{a\}$ este model pentru formula $F(x)$.

***Teorema* 5**. Un element $a \in$ D este valoare pentru variabila x din F(x) dacă $F(a)$ este fie adevărată, fie falsă relativ la D.

***Teorema* 6**. O formulă α implică logic o formulă β dacă orice model al formulei α este model al formulei β.

***Teorema* 7**. O formulă α este logic echivalentă cu β dacă orice model al lui α este modelul lui β, şi invers.

***Teorema* 8**. O formulă α este consistentă dacă ea are cel puţin un model.

***Teorema* 9**. Formula α este logic independentă de formula β dacă există un model pentru β care nu este model pentru α.

***Teorema* 10**. Formula α este contradictoria formulei β dacă orice model al formulei α transformă pe β în propoziţie falsă şi orice model al formulei β transformă pe α în propoziţie falsă.

***Teorema* 11**. Dacă $\alpha \in K$ şi α are loc în orice domeniu în care are loc K, atunci α este deductibilă dintr-o submulţime finită a lui K.

Fie D, D` două domenii astfel că $x \in D$ şi $x` \in D`$. Notăm cu $x - x`$ corespondenţa biunivocă dintre elementele domeniilor D, D`. Pe D definim în continuare predicatul $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ care ia valoarea v sau f pentru orice sistem de valori din D.

Succesiunii de elemente $(x_1, x_2, ..., x_n)$ din D îi corespunde succesiunea $(x`_1, x`_2, ..., x`_n)$ din D` ceea ce înseamnă că putem defini aici predicatul $F`(x`_1, x`_2, ..., x`_n)$.

Predicatul $F`(x`_1, x`_2, ..., x`_n)$ este definit în D` şi corespunde predicatului $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ din D. Notăm această corespondenţă cu $F - F`$.

Definiţie. Două domenii D, D` între care există corespondenţa $x - x`$, astfel că, pentru orice predicat F definit în D are loc echivalenţa $F \equiv F`$ se numesc *izomorfe*.

Cu ajutorul izomorfismului domeniilor se pot studia unele probleme privind axiomatizarea logicii predicatelor pe care le adăugăm la lista de mai sus.

***Teorema* 12**. Dacă două domenii sunt izomorfe şi dacă unul dintre ele împreună cu predicatele sale satisfac un sistem de axiome, atunci şi celălalt satisface acest sistem de axiome.

***Teorema* 13**. Orice sistem de axiome pentru care toate domeniile de interpretare sunt izomorfe este complet.

6. CONCEPTUL DE MODEL ÎN LOGICA MODALĂ

Față de logica propozițiilor și logica predicatelor, definiția conceptului de model în logica modală aduce unele noutăți. Acest concept a fost dezvoltat în ceea ce se cheamă astăzi „semantica lumilor posibile" (sau „semantica în stil Kripke"), forma modernă a semanticii logice aferentă sistemelor modale de tip Lewis.

Istoric vorbind, ideea de lume posibilă apare la Leibniz, dar semantica logicii modale aparține timpului nostru.

Într-un cadru logic mai larg, conceptul de lume posibilă își găsește corespondentul în conceptul lui Carnap de „descriere de stare" sau în conceptul lui Wittgenstein de „stare (posibilă) de lucruri."

Ceea ce aduce nou semantica lumilor posibile față de semantica lui Carnap este că permite definirea unui concept specific de validitate pentru sistemele modale avute în vedere.

Ca și în cazurile precedente voi da mai întâi lista principalelor noțiuni cu care operează acest tip de semantică logică.

1) Mulțimea lumilor posibile W = $\{w_1, w_2,...\}$ (lumea noastră aparține mulțimii W, ea este o lume posibilă de vreme ce este o lume reală).

2) Relația R de *accesibilitate* (sau de *alternativitate*) definită pe elementele mulțimii W. Prin $w_i \, R \, w_k$ înțelegem că lumea w_k este accesibilă lumii w_i sau că w_k este o lume posibilă față de w_i. Din punct de vedere logic aceasta înseamnă că o propoziție adevărată în w_i este posibilă în w_k.

3) Mulțimea formulelor F = $\{\alpha_1, \alpha_2,...\}$ constituite în sintaxa sistemelor modale prin regulile de construcție cunoscute.

4) Mulțimea valorilor logice {1, 0} unde 1 și 0 înseamnă, ca și până acum, adevărul și falsul.

5) Funcția de valorizare V: $F \times W \rightarrow \{1, 0\}$ care restrânge adevărul formulelor din F la o lume posibilă sau o submulți-

me de lumi posibile din W. Prin $V(\alpha, w_i) = 1$ înţelegem că „propoziţia α este adevărată în lumea posibilă w_i".

Funcţia V se defineşte inductiv după structura expresiilor.

1) Pentru o variabilă propoziţională p, $V(p, w_i) = 1$ dacă $p \in w_i$ şi $V(p, w_i) = 0$ dacă $p \notin w_i$.

2) $V(\sim p, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă $V(\sim p, w_i) = 0$.

3) $V(p \bullet q, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă $V(p, w_i) = V(q, w_i) = 1$.

4) $V(p \vee q, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă $V(p, w_i) = 1$ sau $V(q, w_i) = 1$.

5) $V(p \rightarrow q, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă nu are loc $V(p, w_i) = 1$ şi $V(q, w_i) = 0$.

6) $V(Lp, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă pentru orice lume w_k, $V(p, w_k) = 1$ şi $w_i R w_k$.

7) $V(Mp, w_i) = 1$ dacă şi numai dacă există cel puţin o lume posibilă w_k pentru care are loc $V(p, w_k) = 1$ şi $w_i R w_k$.

Cu „*M*" şi „*L*" am notat categoriile modale de „posibil" şi „necesar" (a se observa rolul cuantorilor existenţial şi universal în definirea celor două concepte modale).

***Definiţia* 1**. Se numeşte *model* (pentru un sistem nespecificat de logică modală) un triplet de forma $V = < W, R, V >$ unde W, *R*, V sunt elementele definite mai sus.

***Definiţia* 2**. Se numeşte *structură de modele* un triplet de forma $\mathbf{V} = <W, R, \mathbf{V}>$ unde $\mathbf{V}$ este clasa funcţiilor de valorizare definite relativ la W şi R.

***Definiţia* 3**. O formulă este verificată într-un model V dacă $V(\alpha, w_i) = 1$ şi $w_i \in W$, $V \in \mathbf{V}$.

***Definiția* 4**. O formulă α este *realizabilă* dacă este verificată pentru cel puțin un model.

***Definiția* 5**. O formulă α este *validă* dacă este verificată pentru orice model din orice structură de modele.

Spre deosebire de logica propozițiilor și logica predicatelor unde conceptele de model, realizabilitate, validitate ș.a. sunt general valabile, în logica modală situația este alta, aceste concepte, introduse prin definițiile 1 – 5, se particularizează pentru fiecare sistem modal în parte. Exact spus, prin specificarea proprietăților formale ale relației *R* se ajunge la conceptele de T-model, S4-model, T-structură de modele, T-validitate, S4-validitate etc.

***Definiția* 6**. Prin T-model (= model pentru sistemul T) se înțelege un model de forma $V = < W, R, V >$ unde R este reflexivă (dacă R este reflexivă și tranzitivă avem un S4-model, iar dacă este reflexivă simetrică și tranzitivă un S5-model).

În mod asemănător se definesc conceptele de T-structură de modele, B, S4, S5 – structuri de modele, T, S4, S5, B – validitate ș.a. De exemplu, o formulă α este T –validă dacă este validă pentru orice T –model din orice T –structură de modele.

Teoremele de consistență și completitudine se formulează și ele în mod corespunzător: 1) orice teoremă dedusă în T este T –validă, 2) Orice formulă T –validă este teoremă în T.

J. Hintikka a formulat aceste definiții prin conceptele sale de „mulțime model" și „sistem model". În esență, problemele sunt aceleași, de aceea nu insist. Voi face în schimb câteva precizări în legătură cu alte două probleme de interes pentru logica modală care au ca punct de plecare ideile de lume posibilă și model.

6.1. STRUCTURI ŞI ALGEBRE MODALE

Fie $K = \{K, \cup, \cap, -, 1, 0, *\}$ o algebră booleeană în care 1 şi 0 sunt elementul unitate respectiv elementul prim, iar „*" o operaţie topologică de deschidere definită prin axiomele:

1. $(x \cup y)^* = (x^* \cup y^*)$,
2. $x^{**} = x^*$,
3. $x \subset x^*$,
4. $0^* = 0$.

Axiomele 1) - 4), pe care le-am reprodus după Hughes şi Creswell (36; 311), corespund definiţiei poloneze a spaţiului topologic discutată în cap. III.

Algebra $\{K, ^*\}$ este un spaţiu topologic de deschidere, iar $K = \{K, \cup, \cap, -, 1, 0, ^*\}$ o algebră booleeană topologică. Ea poate constitui un domeniu de interpretare pentru sistemul modal T dacă:

1) Operaţia „*" satisface axiomele 1), 3), 4).

2) Funcţia de valorizare V se defineşte în maniera cunoscută plus condiţia: dacă $V(\alpha) = a$ în K, atunci $V(M\alpha) = a^*$.

Orice expresie α în T îşi asociază prin V un polinom booleean α_v în K astfel că dacă $\alpha_v = 1$ (în K) atunci α este teză (în T).

Algebra K cu axiomele indicate se va numi T *–algebră.* Se poate demonstra în continuare că:

1) există o T – algebră care verifică numai tezele lui T, şi

2) orice teză în T este verificată într-o T – algebră.

Dacă operaţia „*" satisface şi axioma 2), atunci K este o S4 –algebră, iar dacă satisface şi axioma

5. $\forall a \in K\,(a \neq 0 \rightarrow a^* = 1)$

atunci K este o S5-algebră. Prin operaţia topologică de închidere se pot construi domeniile de interpretare pentru sistemele modale care îl au pe L (necesar) ca operator primitiv. Tarski, McKensey, Lemmon, Johnson sunt cei care au adus primele contribuţii în definirea acestor formaţii algebrice pentru logica modală.

6.2. RAPORTUL MODALITATE – POLIVALENŢĂ DIN PERSPECTIVA IDEII DE LUME POSIBILĂ

Întrebarea care se pune este dacă ideea de lume posibilă poate fi racordată ideii de polivalenţă şi dacă aceasta poate fi reprezentată şi ea aritmetic?

Voi încerca să răspund acestei întrebări pornind de la cazul particular în care mulţimea lumilor posibile se reduce la numai două elemente: $W = \{w_1, w_2\}$.

Relativ la W definim valoarea unei formule A în maniera cunoscută:

1) $V(A, w_1) = 1$, $V(A, w_2) = 1$,
2) $V(A, w_1) = 1$, $V(A, w_2) = 0$,
3) $V(A, w_1) = 0$, $V(A, w_2) = 1$,
4) $V(A, w_1) = 0$, $V(A, w_2) = 0$.

Pentru formula A s-au obţinut sistemele de valori: (11), (10), (01), (00) care înseamnă: „adevărat în w_1 şi în w_2“, „adevărat în w_1 şi fals în w_2“ etc.

Aplicând reguli de adevăr pentru operatorii propoziţionali ca în procedeul lui Jaskowski, descris într-un capitol anterior, obţinem definiţiile matriceale pentru un sistem tetravalent de logică modală. Negaţia şi implicaţia vor arăta astfel:

A	$\sim A$
(11)	(00)
(10)	(01)
(01)	(10)
(00)	(11)

$\rightarrow$	(11)	(10)	(01)	(00)
(11)	(11)	(10)	(01)	(00)
(10)	(11)	(11)	(01)	(01)
(01)	(11)	(10)	(11)	(10)
(00)	(11)	(11)	(11)	(11)

Dacă prin necesar înţelegem, ca şi până acum „adevărat în toate lumile posibile", putem construi pentru L matricea:

A	LA
(11)	(11)
(10)	(00)
(01)	(00)
(00)	(00)

Aceste matrici sunt adecvate sistemului modal tetravalent construit de J. Lukasiewicz în studiul său *A System of modal logic* (49; 352).

În sistemele modale de tip Lewis situaţia este cu totul alta, aici mulţimea lumilor posibile este infinită, deci şi mulţimea valorilor de adevăr va trebui să fie infinită. Pentru a vedea exact cum stau lucrurile, vom nota cu W^* cardinalul mulţimii W şi cu V^* cardinalul mulţimii de valori logice V (prin „cardinalul" mulţimii se înţelege, ca şi până acum, numărul de elemente al mulţimii).

Din examinarea inductivă a cazurilor particulare $W^*= 1$, $W^* = 2$, ... ajungem la anumite corespondenţe între cele două mulţimi şi numerele cardinale corespunzătoare lor. Sunt corespondenţele redate în tabelul de mai jos.

Ce observăm examinând acest tabel?

Observăm că numărul valorilor de adevăr este întotdeauna în funcţie de numărul lumilor posibile. În semantica sistemelor modale de tip Lewis, mulţimea W este infinită ($W^* =$

$\aleph_0$) ceea ce face ca şi mulţimea valorilor logice V să fie infinită numai că în timp ce W este infinit numărabilă, V este infinit continuă ($V^* = 2^{\aleph_0}$).

În cunoscuta sa monografie *Many-valued logics*, N. Rescher afirmă că „nu există un sistem polivalent finit care să fie caracteristic pentru sistemele Lewis S1 - S5 din cauza faptului că sistemele polivalente finite conţin tautologii care nu sunt teoreme în S5 (şi ca atare nici în S1 - S4)" (63; 192).

W	W	V	V
W = 1	W = {w}	V = 2	V = {1, 0}
W = 2	W = {w_1, w_2}	V = 4	V = {(11), (10), (01),(00)}
W = 3	W = {w_1, w_2, w_3}	V = 8	V = {(111), (110),..., (000)}
.....	.....	.....	
W = n	W = {w_1,..., w_n}	$V = 2^n$	V = {(11...1), (11...0),..., (00...0)}

Rescher apreciază aici raportul dintre polivalenţă şi modalitate dintr-un punct de vedere sintactic însă el poate fi apreciat şi semantic.

Conceptele de lume posibilă şi model scot în evidenţă de o manieră simplă şi convingătoare caracterul infinitist al sistemelor modale în cauză.

O serie de autori, începând cu Gödel, au reuşit să demonstreze echivalenţa dintre sistemele lui Lewis şi sistemele de logică intuiţionistă în trecerea de la modalitate la polivalenţă, şi invers. „Rezultatul lui Gödel – scrie Rescher – stabileşte faptul că dacă luăm sistemul S4 ca fiind sistemul care guvernează conceptele modale, atunci toate teoremele calculului propoziţional intuiţionist devin teoreme în S4 şi toate

nonteoremele calculului propoziţional intuiţionist sunt nonteoreme în S4" (62; 20).

Caracterul infinitist al logicii modale moderne implică, din păcate, şi unele neajunsuri. Dacă există infinit de multe valori logice, vor exista tot atâtea modalităţi de definire a posibilului, ca şi a celorlalţi operatori modali. Pericolul pluralismului şi al relativismului logic reapare, de data aceasta, într-o formă mult mai elaborată.

Să înţelegem atunci că ideile modale trebuie relativizate la sistemele de axiome şi definiţii?

Ce au în comun aceste idei şi prin ce se deosebesc ele?

Lipsa de unitate revine conceptelor modale ca atare sau numai mijloacelor noastre de abordare a lor?

Iată câteva întrebări la care va trebui să răspundă cercetarea logică şi filosofică actuală.

7. CONCLUZII

Este important să deosebim atunci când vorbim despre aplicaţiile matematice ale conceptului de model între două aspecte pe care le consider esenţiale: 1) conţinutul propriu-zis al modelului (care poate fi sau nu matematic) şi 2) forma matematică de utilizare a lui. Această delimitare dintre conţinut şi formă ne ajută să vedem de la început la ce nivel se plasează aplicaţiile respective şi în ce direcţie evoluează ele.

O primă sursă de modele matematice pentru logică o constituie aritmetica. M-am rezumat la exemplificarea unor astfel de modele pentru silogistică având în vedere că şi din punct de vedere istoric ele au apărut pentru prima dată aici. Între timp situaţia s-a generalizat astfel că, la ora actuală, putem vorbi de modele aritmetice în aproape toate disciplinele logicii.

Este curios că logica modală readuce în discuție distincția *număr natural – număr cardinal*, ca și categoriile numerice de *finit – infinit*, *numărabil – nenumărabil* și altele. Ea se apropie în felul acesta de logica predicatelor unde am văzut că ideea de numărabilitate intervine în relația dintre valoarea expresiilor și tipul domeniilor. În termeni de modele aceasta este totuna cu a spune că, dacă mulțimea de expresii are un model infinit, atunci ea are un model numărabil. Analogia cu logica predicatelor nu ajunge însă până aici pentru că în logica modală nu există o teoremă similară cu teorema lui Lowenheim.

Algebrele modale, în special acele formațiuni algebrice axate pe ideea de operație topologică aduc în discuție și alte categorii de probleme. Relația dintre operațiile logice și operațiile topologice este, după părerea mea, insuficient explicată. Filosofia logicii încă nu a reținut ca pe un fapt demn de luat în considerare aplicațiile de ordin topologic în domeniul logicii modale.

Nu vreau să închei aceste considerații înainte de a trece în revistă și o altă categorie de probleme care se referă, de data aceasta, nu la caracterul interpretării, ci la faptul că sistemele formale pot avea mai multe interpretări. După cum este cunoscut, un sistem formal este construit în legătură cu o anume teorie și această teorie reprezintă, de fapt, primul domeniu de interpretare al sistemului respectiv. Odată însă sistemul construit, apare posibilitatea interpretării lui și în alte domenii care nu mai au nimic în comun cu teoria lui de origine. Aceste interpretări generează modele care sunt, sau pot fi, izomorfe între ele. Am văzut că în logica predicatelor izomorfismul domeniilor a permis demonstrarea unei importante teoreme cu privire la completitudinea sistemelor. În plan general însă, izomorfismul domeniilor are și o altă semnificație.

Fie S un sistem formal şi A, B, C,... modelele lui. Dacă A, B, C,... sunt izomorfe între ele, atunci se poate spune că sistemul S descrie ceea ce au ele în comun, deci ceva foarte general. Or, acest „ceva foarte general" este tocmai *structura*.

Desigur, şi structura poate fi descrisă în limbaj şi atunci ea devine un fel de model privilegiat al sistemului însă există totuşi o deosebire esenţială între structură şi model. Structura este unică în timp ce modelele caracterizate de o structură pot fi mai multe. Apoi, structura este ceva abstract (este chiar un tip superior de abstracţie) pe când modelele sunt concrete, ele aparţin unui domeniu anume.

Nu o dată se întâmplă ca aceste structuri să corespundă unor binecunoscute structuri matematice. Ceea ce am numit în acest capitol T–algebră, S4 şi S5–algebre nu sunt altceva decât „varietăţi topologice" ce caracterizează sistemele modale T, S4, S5. În general, structura se interpune *între* sistemul formal şi model, fapt ce explică de ce în semantica modernă pot fi întâlnite aproape toate conceptele de bază ale matematicii structurale.

VI. APLICAȚII MATEMATICE CU CARACTER SPECIAL

Unele dintre metodele matematice în logică au un caracter întrucâtva diferit decât cele discutate până acum, fie în sensul că ele se aplică la probleme particulare ale logicii, fie că se aplică la probleme ce țin în egală măsură de logică şi de matematică. Lista lor rămâne deschisă. Pe de altă parte, nu este exclus ca aceste metode să fie generalizate în continuare, să se dovedească aplicabile şi la alte probleme decât cele la care se aplică ele astăzi.

1. METODA RAȚIONAMENTULUI DIAGONAL

Această metodă a fost dată de Cantor în legătură cu demonstrația caracterului nenumărabil al mulțimii numerelor reale. Ulterior, metoda lui s-a dovedit a fi o metodă generală pentru acest tip de demonstrație în matematică. În esență, raționamentul lui Cantor constă în a construi un tabel (o enumerare) care să indice existența unei entități ce nu poate fi pusă în corespondență cu niciun element al unei mulțimi numărabile.

Prin „mulțime numărabilă" înțelegem, ca şi până acum, o mulțime infinită ce poate fi pusă în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale. În continuare voi da două exemple de astfel de mulțimi ilustrate prin tabelele (1) şi (2).

(1)
$0, x_{00}\, x_{01}\, x_{02} \ldots$
$0, x_{10}\, x_{11}\, x_{12} \ldots$
$0, x_{20}\, x_{21}\, x_{22} \ldots$
.....

(2)
$f_0(0), f_0(1), f_0(2), \ldots$
$f_1(0), f_1(1), f_1(2), \ldots$
$f_2(0), f_2(1), f_2(2), \ldots$
.....

Exemplul (1). Numerele reale din intervalul [0,1] sunt date în forma unor fracţii zecimale infinite. Dacă dezvoltarea zecimală a unei fracţii este totuşi finită, ultimul ei termen se poate scrie ca o succesiune infinită a cifrei 9. De exemplu, în locul lui 0,236 se va scrie 0,235999...

Tabelul (1) redă fracţiile zecimale de acest tip, el redă corespondenţa biunivocă cu mulţimea numerelor naturale. Totuşi, pe diagonală se formează fracţia zecimală $0, x_{11}\, x_{22}\, x_{33}$ ... ce nu poate avea un corespondent în mulţimea numerelor reale. Prin urmare, mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Exemplul (2). În tabelul funcţiilor aritmetice de un argument apare pe diagonală funcţia $f_x(x)$. Definim acum o funcţie $f(x)$ în felul următor: $f(x) = f_x(x) + 1$. Mai departe, considerăm că în enumerarea noastră funcţia $f(x)$ are indicele k, deci $f_k(x) = f_x(x) + 1$. Întrucât k şi x au fost alese la întâmplare, putem studia cazul particular $k = x$, adică: $f_x(x) = f_x(x) + 1$, un caz ce contravine evident principiului identităţii. Aşadar, nici mulţimea funcţiilor aritmetice de un argument nu este numărabilă.

Aplicaţii logice. Raţionamentul diagonal are şi unele aplicaţii logice foarte interesante, cum ar fi expunerea făcută de Mostowski paradoxului lui Richard. Presupunem că dispunem de toate expresiile unui limbaj L care definesc proprietăţi ale numerelor. Notăm aceste proprietăţi, după Gh. Enescu (20; 78) cu Rich(0), Rich(1), Rich(2),...; Dacă un număr oarecare n nu are proprietatea „Rich$_i$" vom scrie *non-Rich*$_i$ (n). Mai departe construim un tabel asemănător celor exemplificate mai sus:

$Rich_0(0), Rich_0(1), Rich_0(2), \ldots$
$Rich_1(0), Rich_1(1), Rich_1(2), \ldots$
$Rich_2(0), Rich_2(1), Rich_2(2), \ldots$
.....

Pe diagonală se formează expresia $Rich_n\ (n)$. Întrebarea este dacă putem găsi un număr k astfel ca $non\text{-}Rich_k\ (k)$? Dacă da, atunci $non\text{-}Rich_k\ (k)$ este tot o proprietate richardiană şi va trebui să aibă şi ea un indice, să zicem i. Se obţine astfel identitatea:

$$Rich_i\ (k) = non\text{-}Rich_k\ (k)$$

care pentru cazul particular $i = k$ conduce la contradicţia

$$Rich_k\ (k) = non\text{-}Rich_k\ (k).$$

Paradoxul lui Richard poate fi corelat, din perspectiva raţionamentului diagonal, cu conceptul de *adevăr* (la Tarski) şi cu conceptul de *demonstrabil* (la Gödel).

Aplicaţiile în legătură cu conceptul *demonstrabil* au fost iniţiate de Finsler şi au avut drept scop construirea de propoziţii indecidabile (Finsler l-a precedat pe Gödel utilizând o formă a paradoxului lui Richard însă în loc să folosească, la fel ca Richard, noţiunea de *definiţie*, el foloseşte, cum va face mai târziu Gödel, noţiunea de *derivare*).

Se introduce mai întâi definiţia:

$non\text{-}\ Rich_k\ (n) = Rich_k\ (n)$ nu este demonstrabilă,

ceea ce, în simbolismul lui Gödel s-ar traduce prin

$$n \notin Rich\ k = \overline{Bew}\ [Rich_k\ (n)].$$

Printr-un raţionament asemănător se obţine contradicţia:

$$Bew\ [Rich_k\ (n)] = \overline{Bew}\ [Rich_k\ (n)].$$

Două probleme se ridică în legătură cu raţionamentul lui Cantor. Prima este filosofică însă ea are importante consecin-

ţe matematice. A doua este matematică cu implicaţii, de data aceasta, pentru filosofie.

În legătură cu prima problemă, trebuie spus că adversarii teoriei mulţimilor au ridicat obiecţii relativ la faptul că metoda lui Cantor *indică* fără a *construi*. Cu alte cuvinte, este doar indicat că există un număr ce nu poate fi pus în relaţie de corespondenţă cu un element al unei mulţimi numărabile, însă, efectiv, acest număr nu este (şi nici nu poate fi) construit. Din perspectiva matematicii intuiţioniste, raţionamentul diagonal păcătuieşte sub două aspecte – sub aspectul constructivităţii şi sub aspectul legitimităţii unor scheme de raţionare subsumate anumitor legi logice (contrapoziţia implicaţiei, raţionamentul prin reducere la absurd ş.a.). Aceste aspecte care ţin, cum se observă, de logică şi filosofie, au condus la o matematică ce diferă în multe privinţe de matematica mulţimistă.

A doua problemă, despre care am spus că este de natură matematică, se referă la *problema continuului*. Demonstrând nenumărabilitatea anumitor mulţimi, procedeul diagonal pune în evidenţă numere ce nu mai corespund unor mulţimi finite, aşa-numitele „numere transfinite". Să notăm cu $\aleph_0$ cardinalul unei mulţimi numărabile şi cu $\aleph_1$ cardinalul (puterea) unei mulţimi continue, respectiv, a mulţimii numerelor reale.

Relativ la succesiunea $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ se pot face două supoziţii:

$2^{\aleph 0} = \aleph_1$ (ipoteza restrânsă a continuului);
$2^{\aleph n} = \aleph_{n+1}$ (ipoteza generalizată a continuului).

Conform rezultatelor lui Gödel şi Cohen, atât prima cât şi cea de-a doua ipoteză sunt consistente cu axiomele teoriei mulţimilor. Cercetările ulterioare au arătat că, deşi cele două propoziţii nu se pot demonstra, ele sunt justificate logic prin faptul că nu conduc la contradicţii.

Este de departe vizibil că aceste rezultate au consecinţe filosofice extrem de interesante, mai ales că distincţia *continuu-discret*, ca şi *actual-potenţial* relativ la conceptul de infinit, au fost cunoscute filosofilor încă din antichitate.

Reţinem, în concluzie că raţionamentul diagonal nu are aceeaşi destinaţie în logică cu destinaţia lui din matematică. El nu este folosit în logică pentru demonstrarea caracterului nenumărabil al anumitor mulţimi şi cu atât mai puţin pentru introducerea unor noi tipuri de numere. Desigur, nu trebuie exclusă nici eventualitatea ca logica să-i găsească în viitor şi alte utilizări.

2. METODA INDUCŢIEI MATEMATICE

Întrucât termenul „inducţie" este un termen ambiguu va trebui să distingem între principalele lui sensuri, şi anume inducţia logică (cu cele două specii ale ei) şi inducţia matematică. Deşi înrudite, aplicaţiile lor sunt diferite iar problemele pe care le rezolvă ele sunt de asemenea diferite.

În general, prin „inducţie matematică" se înţelege un ansamblu de reguli şi procedee de definire şi demonstrare ce constau din aplicarea principiului inducţiei matematice. Acest principiu a fost încetăţenit odată cu axioma lui Peano şi se referă la numere. El poate fi formulat intensional (prin proprietăţi) sau extensional (prin clase):

$$\{P(0) \bullet [(P(n) \rightarrow P(n+1))]\} \rightarrow \forall m\, P(m),$$

adică: dacă 0 are proprietatea P şi dacă din faptul că n are proprietatea P rezultă că şi succesorul lui n are proprietatea P, atunci orice număr m are proprietatea P.

Presupunând acum că P este intensiunea clasei M, adică $M = \lambda x\, P(x)$, principiul poate fi dat extensional prin:

$$\{0 \in M \bullet (n \in M \rightarrow n + 1 \in M)\} \rightarrow \forall n\,(n \in M).$$

Pe lângă cele două formulări, care sunt de bază, există o serie de formulări înrudite. De exemplu, dacă M este o submulţime nestrictă a mulţimii numerelor naturale N astfel că pentru orice n, M conţine pe n numai dacă ea conţine pe toţi predecesorii lui n, atunci $M = N$.

La acestea se adaugă şi forme mai speciale cum este inducţia transfinită (relativ la numerele ordinale), inducţia structurală (relativ la construcţiile formale) şi inducţia inversă (relativ la anumite tipuri de demonstraţie).

1) ***Demonstraţia prin inducţie.***

Fie P o proprietate a numerelor naturale. O demonstraţie prin inducţie este o demonstraţie de forma:

1) 0 are proprietatea P.
2) Pentru orice n, dacă n are proprietatea P, atunci şi $n + 1$ va avea proprietatea P.
3) Orice număr natural are proprietatea P.

Conform unei terminologii introduse de S. C. Kleene, premisa 1) se numeşte *baza inducţiei*, 2) este *pasul inductiv*, $P(n)$ este *propoziţia inductivă* iar n este variabila după care se face inducţia.

Spre deosebire de inducţia logică, în speţă inducţia incompletă, în inducţia matematică concluzia este certă. Această certitudine poate fi apreciată din două puncte de vedere: 1) al modului în care sunt obţinute obiectele, şi 2) al formei demonstraţiei.

În ce priveşte primul aspect, trebuie spus că obiectele sunt introduse tot pe cale inductivă, iar propoziţia 3) face parte dintr-un principiu de construcţie (ea nu poate fi decât adevărată, în supoziţia că şi celelalte sunt adevărate).

Al doilea aspect ridică însă probleme mai speciale. În demonstrația prin inducție matematică intervin atât scheme deductive cât și scheme inductive, ea are certitudinea deducției și productivitatea inducției. Poincaré explică progresul în matematică prin raționamentele inductive și recursive pentru că, dacă aceste raționamente ar fi pur deductive, propozițiile matematice nu ar fi decât forme foarte sofisticate de-a spune că „*A* este identic cu *A*".

Fie 1, 2, 3, ... valorile variabilei *n*. Pentru aceste valori propozițiile 1) și 2) conduc la schemele *modus ponens*:

P(0)	P(1)	P(2)
$\underline{P(0) \rightarrow P(1)}$	$\underline{P(1) \rightarrow P(2)}$	$\underline{P(2) \rightarrow P(3)}$
P(1)	P(2)	P(3)

Întrucât pentru orice *n* se poate construi o asemenea schemă inferențială putem proceda mai departe inductiv:

$$\frac{P(1), P(2), ..., P(n), ...}{\forall n\, P(n)}$$

Ca o ilustrare a demonstrației prin inducție matematică voi reformula, după Kleene (40; 22), demonstrația următoarei teoreme: Dacă $M^* = n$ și $M \sim M_1 \subset M$, atunci $M_1 = M$.

Prin această teoremă se demonstrează că o mulțime finită nu poate fi echivalentă cu o submulțime proprie a sa.

Propoziția inductivă $P(n)$ se formează în felul următor: pentru oricare două mulțimi M, M_1 dacă $M^* = n$, $M \sim M_1$ și $M_1 \subset M$ atunci $M_1 = M$.

Baza inducției: $n = 0$ și $M = 0$. Urmează că $M = \varnothing$ și dacă $M_1 \subset \varnothing$ atunci $M_1 \subset \varnothing$ și $M_1 = M$.

Pasul inductiv. Presupunem că are loc propoziţia inductivă (= ipoteza inducţiei pentru $x = n$). Dacă $M^* = n + 1$, atunci $M = N \cup \{a\}$ unde $N = n$ şi $a \notin N$. De asemenea, are loc $N \cup \{a\} \sim M_1$ şi $M_1 \subset N \cup \{a\}$. Va trebui să demonstrăm că $M_1 = N \cup \{a\}$.

În corespondenţa biunivocă $N \cup \{a\} \sim M_1$ considerăm că elementului a îi corespunde elementul $b \in M_1$. Atunci $N \sim M_1 - \{b\}$ şi $M_1 - \{b\} \subset (N \cup \{a\}) - \{b\}$. Dar $(N \cup \{a\}) - \{b\} \sim N$, ceea ce înseamnă că $[(N \cup \{a\}) - \{b\}] = n$, $M_1 - \{b\} \sim (N \cup \{a\}) - \{b\}$ şi $M_1 - \{b\} \subset (N \cup \{a\}) - \{b\}$. Conform ipotezei inducţiei, $M_1 - \{b\} = (N \cup \{a\}) - \{b\}$, de unde rezultă că $M_1 = N \cup \{a\}$.

Inducţia matematică poate fi aplicată în logică după cum şi inducţia logică poate fi aplicată în matematică. Un interesant exemplu de aplicaţie logică a inducţiei matematice este demonstraţia dată de Kleene teoremei deducţiei[1].

2) *Definiţii realizate cu ajutorul inducţiei.*

În cartea la care m-am referit, Kleene distinge între definiţiile inductive şi definiţiile prin inducţie (sau recursive). Exemplul clasic de definire inductivă este definiţia numerelor naturale:

1) 0 este numărul natural,
2) Dacă n este număr natural atunci $n`$ (succesorul lui n) este număr natural,
3) Singurele numere naturale sunt cele construite prin 1) şi 2).

Într-un mod asemănător se pot defini conceptele de termen, formulă ş.a. Voi reproduce pentru exemplificare doar definiţia termenilor, alte exemple de definiţii inductive cititorul poate găsi în primul capitol.

[1] Prezentarea detaliată a acestei demonstraţii poate fi găsită în cartea lui Gh. Enescu, *Teoria sistemelor logice* (vezi pag. 82 şi urm.).

1) 0 este termen,
2) Orice variabilă este termen,
3) Dacă x şi y sunt termeni atunci $x`$, $x + y$, xy sunt termeni.
4) Sunt termeni doar expresiile construite prin regulile 1) - 3).

Kleene împarte definiţiile inductive în fundamentale şi nefundamentale. În general, o definiţie inductivă este fundamentală dacă în baza ei se poate construi un domeniu de entităţi (acelaşi cu domeniul variabilelor). O definiţie este nefundamentală dacă ea defineşte doar predicate relative la aceste domenii de entităţi. În alt plan, distincţia fundamental-nefundamental corespunde distincţiei dintre obiect şi expresie.

În logică nu avem de-a face cu definiţii inductive fundamentale pentru că domeniul celor două valori logice $V = \{v, f\}$ nu este construit inductiv. Avem aici un alt aspect al distincţiei dintre logică şi matematică, distincţie ce vizează domeniul de obiecte la care se raportează celelalte două ştiinţe.

Dacă în logică nu întâlnim definiţii inductive fundamentale, în schimb, sunt frecvent întâlnite definiţiile nefundamentale.

Indiferent că este vorba de logică sau matematică, definiţiile nefundamentale sunt generalizări ale definiţiilor fundamentale. Aceste generalizări constau în faptul că proprietatea iniţială nu se mai aplică unui singur obiect, ci unei clase de obiecte. Apoi, operaţia succesor dispare, locul ei fiind reluat de o altă operaţie care poate fi o operaţie de construcţie şi chiar de derivare (vezi definiţia conceptului de formulă). Kleene consideră definiţiile inductive nefundamentale ca fiind definiţii ale unor predicate ce pot fi asociate ideilor de adevăr sau fals. Valoarea predicatului considerat se determină prin raportare la clauzele ce compun definiţia inductivă. După cum arată Kleene, aceste clauze pot fi directe sau extreme. Clauzele directe numesc obiectele pentru care predicatul ia valoarea v, iar clauza extremă arată că aceste obiecte sunt singurele caracteri-

zate astfel (pentru orice alt obiect predicatul ia valoarea *f*). La rândul lor, clauzele directe se împart în clauze de bază, prin care se indică obiectele iniţiale ce satisfac predicatul, şi clauzele inductive care asociază valoarea *v* doar obiectelor ce stau într-o anume relaţie cu obiectele iniţiale. Prin aceste clauze, valoarea predicatului este determinată într-un mod univoc.

3. METODA FUNCŢIILOR RECURSIVE

Definiţiile prin inducţie (sau recursive) se aplică funcţiilor şi predicatelor ce pot fi reprezentate ca funcţii. Ca şi definiţiile inductive, aceste definiţii constau din trei paşi: 1) se dă valoarea funcţiei, respectiv predicatului, pentru valoarea iniţială a argumentului, 2) pentru orice argument x, se dă valoarea funcţiei pentru valoarea imediat următoare a argumentului; 3) prin 1) şi 2) se consideră că valoarea funcţiei este definită în general.

O funcţie definită prin 1) - 3) este funcţie recursivă sau funcţie definită recursiv.

Spre deosebire de definiţiile inductive, care merg de la simplu la complex, în definiţiile recursive drumul este oarecum invers. Valoarea funcţiei este determinată regresiv, prin revenire de la complex la simplu, cu condiţia ca argumentul funcţiei să fie construit inductiv. Ecuaţiile de mai jos

$$\begin{cases} \varphi(x) = q \\ \varphi(x') = \chi(x, \varphi(x)) \end{cases}$$

exprimă definiţia funcţiei $\varphi(x)$ prin inducţie după variabila x când q este un număr dat, iar $\chi\ (x, y)$ este o funcţie de două argumente de asemenea dată.

Pentru exemplificare să-l calculăm pe $\varphi(4)$. Conform celor două ecuaţii de mai sus, obţinem următoarele valori pentru argumentul funcţiei construit inductiv:

$\varphi(0) = q,$
$\varphi(1) = \chi\,(0, \varphi(0)) = \chi\,(0, q),$
$\varphi(2) = \chi\,(1, \varphi(1)) = \chi\,(1, \chi\,(1, \varphi(0)) = \chi\,(1, \chi\,(0, q)),$
$\varphi(3) = \chi\,(2, \varphi(2)) = \chi\,(2, X(1, \varphi(1)) =$
$\chi\,(2, \chi\,(1, \chi\,(0, q))),$
$\varphi(4) = \chi\,(3, \varphi(3)) = \chi\,(3, X(2, \varphi(2)) =$
$\chi\,(3, \chi\,(2, \chi\,(1, \chi\,(0, q)))).$

Întrucât dispunem de un procedeu prin care pentru orice număr x, putem calcula valoarea $\varphi(x)$, funcţia φ este univoc determinată. De altfel, conform unui rezultat obţinut de A. Church, cunoscut sub numele de *teza lui Church*, funcţiile recursive sunt funcţii calculabile.

În alte definiţii recursive, funcţia φ depinde de variabilele adiţionale numite şi „parametri". Sistemele de ecuaţii:

$$\begin{cases} x + 0 = x \\ x + y' = (x = y)' \end{cases} \qquad \begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot y' = (x \cdot y) + x \end{cases}$$

definesc funcţiile $x + y$, $x \cdot y$ prin inducţie după y avându-l pe x ca parametru.

În logică, funcţiile de adevăr sunt funcţii definite recursiv:

$Nx = 1 - x,$
$Kxy = \min(x, y),$
$Axy = \max(x, y),$
$Cxy = \max(1 - x, y)$ etc.

Indiferent că este vorba de matematică sau logică, definiţiile recursive presupun o serie de scheme de operaţii şi definiţii pe care le vom numi, după Gh. Enescu, „scheme de recursie". În varianta dată de Kleene (40; 219) aceste scheme arată astfel:

(1) $\varphi(x) = x`$,
(2) $\varphi(x_1, ..., x_n) = q$
(3) $\varphi(x_1, ..., x_n) = x_i$,
(4) $\varphi(x_1, ..., x_n) = \varphi(\chi_1(x_1, ..., x_n), ..., \chi_m(x_1, ..., x_n))$,

$$(5a)\ \begin{cases} \varphi(0) = q, \\ \varphi(y') = \chi(y, \varphi(y)) \end{cases}$$

$$(5b)\ \begin{cases} \varphi(0, x_2, ..., x_n) = \chi(x_2, ..., x_n), \\ \varphi(y', x_2, ..., x_n) = \chi(y, \varphi(x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n). \end{cases}$$

O funcţie definită prin aplicarea schemelor (1) – (5) se numeşte funcţie *primitiv recursivă*. La rândul lor, predicatele ce pot fi asociate funcţiilor recursive sunt predicate (concepte) recursive. Prin procedeul aritmetizării, Gödel a arătat că principalele predicate metateoretice pot fi definite recursiv, cu excepţia predicatului „*x* este formă demonstrabilă", care este nerecursiv.

4. METODA DIAGRAMELOR ŞI A REPREZENTĂRILOR GRAFICE

La fel ca în matematică, în logică pot fi întâlnite o serie de diagrame, scheme şi reprezentări grafice care ajută la formularea anumitor probleme şi care de multe ori se dovedesc a fi suficiente rezolvării lor. Cele mai cunoscute sunt diagramele Euler din silogistică utilizate pentru testarea validităţii modurilor silogistice şi a inferenţelor imediate. Cum se ştie, ele reprezintă raporturile dintre termenii judecăţilor silogistice, mai precis, raporturile dintre extensiunile acestor termeni. Logicianul român Florea Ţuţugan a demonstrat că aceste diagrame au totuşi un caracter limitat, că anumite legi silogistice,

cum ar fi legea potrivit căreia din premisele negative nu se poate obţine nici o concluzie, sunt prejudecăţi datorate tocmai acestui gen de diagrame. „Reprezentarea prin cercuri – notează Fl. Ţuţugan – presupune o completare, o analiză logică a poziţiilor posibile a cercurilor în cadrul diferitelor judecăţi în aşa fel încât să fim siguri că nu am omis nici o posibilitate. Această analiză logică este cea care dă în fond vigoare şi generalitate demonstraţiei. Simpla reprezentare prin cercuri, neînsoţită de o analiză care să dovedească exhaustivitatea cazurilor, nu este suficientă" (72; 318).

Trebuie spus că logicianul român este cel care a dat o interesantă dezvoltare silogisticii prin includerea termenilor negativi pe care i-a reprezentat printr-un alt gen de diagrame.

Pornind de la diagramele Euler, J. Venn a introdus o nouă categorie de diagrame, aşa-numitele „diagrame Venn". Sunt reprezentate aici toate intersecţiile posibile ale claselor ce reprezintă extensiunile termenilor în cadrul propoziţiilor de predicaţie. Prin analogie, au fost introduse apoi alte diagrame cum ar fi diagramele Veitch, Karnaugh ş.a., folosite în rezolvarea altor probleme, nu doar a celor din silogistică.

În afară de diagrame există la ora actuală o serie de alte reprezentări şi scheme grafice care pot fi găsite, practic, în toate disciplinele logicii. Ele diferă de la autor la autor fiind folosite mai mult în scopuri particulare şi deci nu prezintă un interes logic general.

VII. CONSIDERAŢII FINALE

Sunt conştient că prezentarea pe care am făcut-o logicii moderne în paginile acestei lucrări nu este nici foarte exactă, nici foarte completă. Sper, totuşi, că ea este suficientă pentru problemele pe care le-am pus în discuţie cu privire la actualele raporturi metodologice dintre logică şi matematică.

Prima idee pe care am vrut să o subliniez este că termenul „metodă matematică", deşi foarte vehiculat, nu este suficient de precis, că el a fost lăsat oarecum la voia întâmplării. După părerea mea, acest termen poate fi luat în cel puţin două sensuri care nu sunt străine unul de celălalt: un sens restrâns (relativ la problemă), şi un sens larg (relativ la teorie).

În sens restrâns, metoda este un sistem de reguli ce prescriu modul de realizare al unor operaţii în vederea obţinerii unui anumit rezultat (rezultatul problemei).

Sensul larg este definit în raport cu structura teoriilor. Relativ la orice teorie, fie ea logică sau matematică, am distins între: *a*) simbolismul (limbajul) teoriei, *b*) sistemul ei de concepte, *c*) procedeele folosite, *d*) organizarea teoriei.

Dacă o teorie T_1 oferă aplicaţii într-o altă teorie T_2 în raport cu fiecare din aceste nivele, atunci vorbim de „metoda T_1 în T_2".

Primul sens al termenului „metodă" este subsumat celui de-al doilea, care este mult mai special.

Nu este obligatoriu ca T_1 să aparţină matematicii şi T_2 logicii, s-ar putea întâmpla ca ambele teorii să fie teorii logice.

Prima situaţie caracterizează începuturile logicii simbolice, faţă de a doua, care este specifică dezvoltării ei actuale.

Se mai poate vorbi atunci de aplicaţii matematice în raport cu actualele teorii logice?

Eu cred că da, pentru că de cele mai multe ori modelele matematice întâlnesc metodele matematicii doar în planul determinărilor lor foarte generale, sesizabile numai la o abordare de ordin metateoretic. În aplicaţiile efective, deci în trecerea de la metateoretic la teoretic, aceste metode încep să se distanţeze, să-şi determine funcţionalitatea în raport cu obiectul propriu-zis la care se aplică. Aşa cum am spus de mai multe ori până acum, deosebirile de obiect sunt cele care impun, în ultimă instanţă, deosebirile lor de metodă.

Metodele inductive pe care le-am examinat în ultimul capitol au scos în evidenţă faptul că domeniul valorilor logice nu se poate construi inductiv, ceea ce mi se pare a fi foarte semnificativ pentru problemele în discuţie.

Faptul că cele două ştiinţe comunică între ele, chiar şi în acest mod abstract, i-a determinat pe mulţi autori contemporani să recunoască logicii o anume *aptitudine* pentru matematizare, corelativ cu o aptitudine similară a matematicii pentru logicizare. Observaţia mi se pare justă, însă trebuie precizat că aceste „aptitudini" care au asociat cele două ştiinţe într-o dezvoltare unitară le-au transpus, una faţă de cealaltă, într-un fel de limite cu valoare normativă. Sunt limite spre care logica şi matematica tind continuu fără a le atinge, practic, niciodată. Vreau să spun prin aceasta că nici logica nu devine matematică şi nici matematica nu devine logică, că logica este doar matematizabilă, după cum şi matematica este doar logicizabilă.

Fiecare rezultat cu adevărat important în istoria celor două ştiinţe pledează în egală măsură atât în favoarea apropierii, cât şi a distanţării lor. Această „dialectică" a raporturilor dintre logică şi matematică constituie un element de noutate care ar merita o mai mare atenţie din partea acelor filosofi preocupaţi de fenomenul actual al ştiinţei.

Un factor important, dacă nu cumva chiar decisiv, în dezvoltarea matematică a logicii l-a constituit limbajul sim-

bolic. Ideea pe care am încercat să o argumentez în primul capitol este că, indiferent de faza istorică a dezvoltării ei, logica nu se poate dispensa de un minimum de simbolism. Începutul îl va face Aristotel, care introduce variabilele pentru termeni dând astfel o primă tratare formală propoziţiei şi raţionamentului. Stoicii şi megaricii vor practica un formalism asociat unui alt gen de variabile.

Este foarte adevărat că nevoile fundamentării logice a matematicii au grăbit considerabil procesul, însă nu cred că fără acest impuls din partea matematicii limbajele simbolice nu ar fi apărut în logică. Să nu uităm că G. Boole nu a plecat de la nevoile matematicii şi nici tradiţia algebrică din dezvoltarea logicii nu este direct legată de problemele fundamentării.

În orice caz, logica dispune astăzi de propriul ei simbolism şi acesta este lucrul cel mai important. Problema nu este numai de interes logic, ci şi general teoretic demonstrând că nu doar matematica, ci o serie de alte ştiinţe s-au dovedit apte pentru a recurge la o exprimare simbolică. Rezultatele sunt încă modeste însă procesul, odată început, cine îl mai poate opri?

Fie că este vorba de logică, fie de matematică, noi nu putem vorbi despre simboluri decât prin abstracţie, pentru simplul motiv că nu există simboluri în general, ci simboluri pentru ceva anume – obiecte, proprietăţi, relaţii, operaţii etc. Ca şi în matematică, generalizarea simbolismului în logică a fost posibilă doar odată cu clarificarea conceptului de variabilă şi, legat de acesta, a conceptului de funcţie. Este pentru prima dată, poate, când un concept matematic fundamental este folosit pentru exprimarea unei realităţi nematematice. Relaţiile logice dintre propoziţii şi chiar relaţiile din cadrul aceleaşi propoziţii au putut fi exprimate într-o formă nouă, ceea ce a creat premisele unor aplicaţii matematice de alt gen. Ideea care a stat la baza acestor aplicaţii şi care a apărut pentru prima dată la Frege, în *Begriffsschrift*, este că mulţimea

propoziţiilor de o anumită formă poate fi asimilată mulţimii argumentelor unei anumite funcţii. Iată cum un concept al logicii tradiţionale – forma – devine condiţie pentru aplicarea unui concept matematic – funcţia.

Dar pentru ca lucrurile să fie duse până la capăt, conceptul de funcţie trebuia el însuşi revizuit. S-a ajuns astfel la un concept de funcţie mult mai clar, dar şi mult mai general, faţă de care funcţiile din logică, ca şi cele din matematică, sunt simple particularizări. Nici unificările care s-au dat ulterior din partea funcţiilor recursive sau a calculului lambda-conversiunii nu au putut estompa diferenţele dintre cele două categorii de funcţii.

Lucruri asemănătoare pot fi spuse şi despre alte concepte. Dacă am fi luat în considerare logica inductivă, atunci obligatoriu trebuia adăugat conceptul de probabilitate. Pentru că am discutat acest concept cu altă ocazie, nu insist aici asupra lui. Aş vrea totuşi să revin asupra unei probleme ce ţine de aplicaţiile conceptului de structură, o problemă ce depăşeşte stadiul simplei curiozităţi logice.

Există în momentul de faţă structuri matematice şi structuri logice, precum şi o serie de structuri comune pe care nu le mai putem lega de un domeniu anume.

Pe de altă parte, structuri ce provin din teorii foarte îndepărtate ale matematicii, cum sunt structurile topologice, s-au dovedit potrivite pentru modelarea unor concepte logice, cum ar fi conceptele modale. Însă logica modală nu şi-a găsit până astăzi o utilizare corespunzătoare în matematică, ea este o logică mai mult de inspiraţie filosofică.

Cum se explică aceste corespondenţe structurale între teorii care, prin obiect, nu au nimic în comun unele cu altele?

Este o întrebare ce ţine de metateorie şi chiar de filosofie. De altfel, trebuie spus că formarea acestor „supraconcepte" este reversul, în plan metateoretic, ce însoţeşte inevitabil apli-

caţiile respective. De aici ideea unei metodologii generale a ştiinţelor deductive sugerată de titlul lucrării cărţii lui Tarski, *Introduction to Logic and Methodology of Deductiv Sciences*.

Cu totul altfel stau lucrurile în aplicaţiile logice ale conceptului de număr. Aceste aplicaţii nu au dus la generalizări de natura celor invocate mai sus. S-ar putea ca logica fuzzy să producă unele surprize însă deocamdată ideea de „număr fuzzy" pare încă destul de îndepărtată. În al doilea rând, numerele nu au fost folosite în logică pentru exprimarea unor raporturi cantitative decât într-o foarte mică măsură. Este o deosebire esenţială între „a gândi despre cantitate", respectiv „raporturi cantitative", ca în aritmetică, şi „a gândi despre gândire", respectiv „formele gândirii", ca în logică. „Pentru a construi o imagine cantitativă asupra lumii - scrie Gr. Moisil - trebuie să avem o ştiinţă foarte dezvoltată a limbajului numerelor şi această ştiinţă este analiza matematică. Ceea ce caracterizează cantitatea este faptul că ea creşte sau descreşte, că ea poate varia în timp şi spaţiu" (52; 320).

Dar cele mai importante dintre conceptele logicii nu pot fi gândite în termeni de „cât de mult?" sau „cât de mare?" decât într-un mod vag. Acesta este şi motivul pentru care o disciplină matematică cum este analiza nu şi-a găsit până astăzi o utilizare corespunzătoare în logică.

Există, totuşi, câteva aplicaţii cu caracter aritmetic în logică peste care nu se poate trece cu vederea. Este vorba mai întâi de aplicaţiile limbajului aritmetic, aplicaţii care încep cu Leibniz şi care ating punctul culminant odată cu Gödel. Deosebit de importante sunt apoi modelele aritmetice ale diferitelor formalisme logice. Faptul că discipline de bază din logică pot fi modelate aritmetic denotă că, cel puţin în unele fragmente ale sale, logica are o structură mai generală ce depăşeşte cadrele stricte al modelului său propriu.

În sfârşit, de mare interes logic sunt şi categoriile numerice *finit-infinit*, *actual-potenţial* şi *continuu-discret*. În legătură cu distincţia *finit-infinit*, Dubarlé a avansat ideea că aceasta ar fi esenţială pentru înţelegerea distincţiei dintre logică şi matematică. Preluată şi de unii autori români, această idee se bazează pe faptul că într-un sistem logicist cum ar fi *Principia Matematica*, axioma infinitului nu poate fi dedusă, că această axiomă este independentă de logică.

Argumentul nu mi se pare convingător pentru că axioma infinitului este independentă nu doar faţă de logică, ci şi faţă de matematică. Ea este o particularizare a unui principiu mult mai general pe care l-aş lega mai degrabă de filosofie decât de matematică. De altfel, trebuie precizat că toate distincţiile pe care le discutăm în legătură cu ideea de infinit, logica nu le mai asociază ideii de număr, ci unor entităţi de alt gen (valori de adevăr, de exemplu). Nefiind legate de un obiect anume, aceste categorii pot fi tratate după modelul categoriilor filosofice. Este drept că logica şi matematica le-au dat o utilizare foarte precisă adaptându-le nevoilor proprii, însă aceasta nu afectează în nici un fel statutul lor filosofic. Dimpotrivă, precizările la care au fost supuse sporesc capacitatea lor discursivă dând posibilitatea reluării unor probleme filosofice într-un cadru conceptual mult mai larg şi mai bine definit.

S-ar putea discuta încă foarte mult despre caracterul matematic al logicii moderne, aici m-am rezumat doar la câteva aspecte pe care le-am considerat mai importante. Ele demonstrează că logica a intrat într-o nouă fază de dezvoltare, iar „pluralismul metodologic" care o caracterizează este de natură să-i permită noi acumulări şi sistematizări. Conţinutul ei de idei trebuie expus de aşa manieră încât să-i permită aplicarea şi în alte compartimente ale cunoaşterii. Cred că nu este lipsit de interes să reamintesc că în momentul de faţă sunt create premisele pentru rezolvarea unor noi probleme privind rapor-

tul dintre logica pură şi logica aplicată. Aceasta impune ca metodele logicii să fie cât mai bine elaborate, pentru că nu toate ştiinţele presupun logica în acelaşi fel. Dacă pentru matematică de interes primordial sunt metodele de demonstrare şi rezolvare, alte ştiinţe reclamă mijloace logice mai slabe – definiţia, clasificarea sau simpla exprimare simbolică, ca să mă rezum doar la câteva exemple. Iată de ce este necesar ca logica modernă să se dezvolte în general şi nu doar din perspectiva raporturilor sale cu matematica.

În concluzie, nu este vorba de a mă opune matematizării logicii, cum s-a văzut, acest lucru nu este nici posibil şi nici de dorit, ci acaparării ei de către matematică. Acest fenomen poate duce la stagnări dăunătoare în egală măsură logicii şi matematicii. Or, logica este un „bun comun", ea este studiul formelor generale ale gândirii, matematice şi nematematice, de aceea, legătura ei cu intuiţia şi conceptul este indispensabilă.

BIBLIOGRAFIE

1. **Ackermann, W.**, *Solvable Cases of Decision Problem*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

2. **Albu, A.**, *Introducere în fundamentele matematicii*, partea I şi II, A, B, Univ. de Vest din Timişoara, 1995.

3. **Berkeley, E. C.**, *Symbolic Logic And Intelligent Machines* (trad. rusă, Moscova, 1961).

4. **Bieltz, P.**, *Logici polivalente*, în vol. *Direcţii în logica contemporană*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1974.

5. **Bochenski, I. M.** *On the Categorial Syllogism*, în A. Menne (ed) *Logico-Philosophical Studies*, Dordrecht - Holland, Amsterdam, 1962.

6. **Boole, G.**, *An Investigation of The Laws Of Thought*, Dover Publications, Inc.

7. **Botezatu, P.** *Constituirea logicităţii*, Editura Ştinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1966.

8. **Bourbaki, N.**, *Arhitectura matematicii*, În vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

9. **Bourbaki, N.**, *Theorie des ensembles*, Herman, Paris, 1970.

10. **Carnap, R.**, *Logical Foundations of Probabilities*, The University of Chicago Press, 1960.

11. **Carnap, R.**, *Semnificaţie şi necesitate*, Editura Dacia, Cluj, 1972.

12. **Church, A.**, *The Calculi of Lambda - Conversion,* în „Ann. Of Matematical Studies", 6, Princeton, 1941 (reed. 1951).

13. **Church, A.**, *Introduction To Mathematical Logic*, Princeton University Press, 1956.

14. **Church, A.**, *Matematica şi logica*, în *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

15. **Corcoran, J., Wood, S.**, *Boole`s Criterion For Validity and Invalidity*, în „Notre - Dame Journal Of Formal Logic", vol. 21, Nr. 4 / 1980.

16. **Curry, H. B., Feys, R.**, *Combinatory Logic I*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

17. **Daigneault, A.**, *Theorie des modeles en logique mathematique*, Les Presses de L`Universite de Montreal, 1967.

18. **Enescu, Gh.**, *Logică şi Adevăr*, Editura Politică, Bucureşti, 1967.

19. **Enescu, Gh.**, *Logica Simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1971.

20. **Enescu, Gh.**, *Teoria sistemelor logice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.

21. **Enescu, Gh.**, *Fundamentele logice ale gândirii*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

22. **Enescu, Gh.**, *Dicţionar de logică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

23. **Faiblemen, J. K.**, *Assumption of Whitehead`s And Russell`s Princ. Mathematica*, în „International Logic Review", Nr. 8 / 1973.

24. **Felix, L.**, *Expunere modernă a matematicii elementare*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1973.

25. **Fraenkel, A., Bar - Hillel, Y.**, *Foundations of Set Theory*, North – Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

26. **Frege, G.**, *Begriffsschrift*, în J. von Heijenoort (ed), *From Frege To Gödel*, Harvard, 1967.

27. **Frege, G.**, *Scrieri logico-filosofice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977.

28. **Friedman, W. H.**, *Calculemus*, în „Notre - Dame Journal Of Formal Logic", vol. 21, Nr. 1 / 1980.

29. **Gödel, K.**, *On Formally Undecidable Propositions of Principia Math. and Related System I*, în J. von Heijenoort (ed) *From Frege to Gödel*, Harvard, 1967.

30. **Goodstein, R. L.**, *Mathematical Logic*, Licester University Press, 1957.

31. **Goodstein, R. L.**, *Recursive Number Theory*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, 1962.

32. **Grecu, C.**, *Logica interogativă şi aplicaţiile ei*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1982.

33. **Hilbert, D.**, *Gândirea axiomatică*, în vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

34. **Hilbert, D.**, Ackermann, W., *Gründzuge der theoretischen Logik* (traducere rusă, Moscova, 1947).

35. **Hintikka, J.**, *Models For Modalities*, D. Reidel Publ. Company, Dordrecht - Holland, 1969.

36. **Hughes, G. E. Creswell, M. J.**, *An Introduction To Modal Logic*, Methuen and Co LTD, London, 1972.

37. **Hurley, P.**, *A Concise Introduction To Logic*, Wadsworth Publ. Company, Belmont California, 1994.

38. **Kahane, H.**, *Logic And Philosophy. A Modern Introduction*, Wadsworth Publ. Company, Belmont California, 1990.

39. **Kalicke, C.**, *Infinitary Propositional Intuitionistic Logic*, în „Notre - Dame Journal of Formal Logic", Nr 2 / 1980.

40. **Kleene, S. C.**, *Introduction To Metamathematics*, North – Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1971.

41. **Kleene, S. C.**, *Mathematical Logic*, John Willey & Sons, Inc. New York, London, Sydney.

42. **Knealae, W., Knealae, M.**, *Dezvoltarea Logicii*, vol. 1, 2, Editura Dacia, Cluj - Napoca, 1974, 1975.

43. **Kneebone, G. T.**, *Mathematical Logic And The Foundations of Mathematics*, D. Van Nostrand Company Limited, London, Toronto, New York, Princeton, New Jersey, 1963.

44. **Kolmogorov, A.**, *Contribuţii la interpretarea logicii intuiţioniste*, în vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

45. **Körner, St.**, *Introducere în filosofia matematicii*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

46. **Leibniz, G. W.**, *Logical Papers*, Clarendon Press, Oxford, 1966.

47. **Lukasiewicz, J.**, *Elements of Mathematical Logic*, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1956.

48. **Lukasiewicz, J.**, *Aristotle`s Syllogistic From The Standpoint of Modern Formal Logic*, Oxford at the Clarendon Press, 1957.

49. **Lukasiewicz, J.**, *Selected Works*, North - Holland Publishing Company, Amsterdam, London, Warszawa, 1970.

50. **Marcov, A. A.**, *Despre matematica constructivistă*, în vol. *Logică şi Filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966.

51. **Moisil, Gr.**, *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

52. **Moisil, Gr.**, *Etapele cunoaşterii matematice*, în *Istoria ştiinţei şi reconstrucţia ei conceptuală*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

53. **Mostowski, A.**, *Foundational Studies*, vol. I, II, North – Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

54. **Nilson, N. J.**, *Problem-Solving Method*, în vol. *Artificial Intelligence* (traducere rusă, Moscova, 1973).

55. **Novicov, P. S.**, *Elemente de logică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

56. **Poincaré, H.**, *Ştiinţă şi ipoteză*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

57. **Prior, A. N.**, *Formal Logic*, Oxford University Press, 1962.

58. **Putnam, H.**, *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press, 1987.

59. **Quine, O.**, *Methods of Logic*, Holt Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, 1966.

60. **Quine, O.**, *Mathematical Logic*, Cambridge Mass, 1951.

61. **Rasiowa, H., Sikorski, R.**, *The Mathematic of Metamathematics*, PWN, Warszawa, 1970.

62. **Rescher, N.**, *Topics In Philosophical Logic*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht - Holland, 1968.

63. **Rescher, N.**, *Many - Valued Logic*, Mc Graw - Hill Book Company, New York, St. Louis, London, Toronto, Mexic, 1969.

64. **Robinson, A.**, *Introduction To Model Theory And To The Metamathematics of Algebra*, (trad. rusă, Moscova, 1967).

65. **Russell, B.**, *Introduction à la philosophie mathématique*, Payot, Paris, 928.

66. **Surdu, Al.**, *Elemente de logică intuiţionistă*, Editura Academiei, Bucureşti, 1976.

67. **Ştirbăţ, Tr.**, *Corespondenţe structurale în logica modernă*, Editura Junimea, Iaşi, 1986.

68. **Tarski, A.**, *Introduction To Logic And To The Methodology of Deductive Science*, Oxford University Press, New York, 1963.

69. **Tarski, A**, *Logique, Semantique, Metamathématique*, vol. I, Libraire Armand Colin, Paris, 1972.

70. **Târnoveanu, M.**, *Elemente de logică matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1964.

71. **Trakhtenbrot, B.**, *Algoritmes et résolution de problèmes par des machines*, în vol. *Nouvelle orientationes des mathématiques*, Moscova, 1975.

72. **Ţuţugan, Fl.**, *Cu privire la valabilitatea unor moduri silogistice, altele decât cele ale logicii clasice*, în vol. *Probleme de logică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1956.

73. **Vieru, S.**, *Axiomatizări şi modele ale modelelor silogistice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1975.

74. **Vieru, S.**, *Semantica lumilor posibile şi logica modală*, în vol. *Direcţii în logica contemporană*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1974.

75. **Wang, Hao.**, *Studii de logică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1972.

76. **Whitehead, A. N., Russell, B.**, *Principia Matematica*, Cambridge University Press, vol. I – III, ed. a doua, 1927, retipărire 1964.

77. * * * *Logică şi Filosofie* (studii), Editura Politică, Bucureşti, 1966.

78. * * * *Mica enciclopedie de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1984.

TIMIŞOARA

CUPRINS

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA 7

INTRODUCERE 8

I. SIMBOLISMUL ŞI LOGICA 25
1. Constituirea simbolismului logic 25
2. Tipuri de limbaje simbolice în logică 37
3. Limbajul aritmetic în logică 42
   3.1. Limbajul aritmetic la Leibniz 43
   3.2. Limbajul aritmetic în logica propozițiilor .. 46
   3.3. Limbajul aritmetic şi sistemele de numerație 49
   3.4. Aritmetizarea gödeliană 51
4. Limbajul formalizat în logică şi matematică 55
5. Concluzii 58

II. CONCEPTE FUNDAMENTALE ALE MATEMATICII ÎN LOGICĂ 61
1. Conceptul de mulțime în logică 62
2. Funcția - de la matematică la logică 71
3. Logica modernă şi conceptul matematic de număr ... 84
4. Este structura (formală) specifică matematicii?..... 95
5. Concluzii 110

III. AXIOMATICA ÎN LOGICĂ ŞI MATEMATICĂ..... 113
1. Valori logice şi predicate metateoretice 114
2. Sisteme axiomatice în logica propozițiilor şi logica predicatelor 123
3. Sistemul axiomatic şi conceptul de consecință logică 129
4. Sistemul axiomatic şi conceptul de sistem deductiv 133
5. Sistemul axiomatic şi conceptul de teorie formalizată 133
6. Concluzii 144

IV. ALGORITMII ŞI LOGICA 148
1. Conceptul de problemă 149
2. Conceptul de algoritm. 153
3. Algoritmii în logică 156
4. Algoritmul şi problema deciziei 159
5. Problema deciziei în logica propoziţiilor 162
6. Problema deciziei în logica predicatelor 167
7. Concluzii 171

V. MATEMATICA ŞI CONCEPTUL SEMANTIC DE MODEL 175
1. Interpretare şi model 175
2. Modele aritmetice în logică 178
3. Alte modele 181
4. Conceptul de model în logica propoziţiilor 183
5. Conceptul de model în logica predicatelor 185
6. Conceptul de model în logica modală 190
6.1. Structuri şi algebre modale 193
6.2. Raportul modalitate – polivalenţă din perspectiva ideii de lume posibilă..... 194
7. Concluzii 197

VI. APLICAŢII MATEMATICE CU CARACTER SPECIAL 200
1. Metoda raţionamentului diagonal 200
2. Metoda inducţiei matematice 204
3. Metoda funcţiilor recursive 209
4. Metoda diagramelor şi a reprezentărilor grafice..... 211

VII. CONSIDERAŢII FINALE 213

BIBLIOGRAFIE 220